



Universidad de Concepción  
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas  
Departamento de Geofísica

*Informe de Tópicos en Geofísica I:*

**Desarrollo de la teoría base de las técnicas de  
Interferometría Sísmica Pasiva, con énfasis en las Ondas  
Coda**

- Alumno: Carlos Herrera Ramírez
- Carrera: Geofísica
- Asignatura: Tópicos en Geofísica I
- Profesor Guía: Matthew Miller

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Contexto y Marco Conceptual

El desarrollo de la Interferometría Sísmica ha tenido un gran auge en los últimos años en el campo de la Sismología. Es conocido por todos el hecho de que la Tierra es un planeta muy dinámico, tanto en el ámbito tectónico como en el atmosférico y oceanográfico. En lo relativo a la tectónica de placas, se sabe que la corteza está en permanente movimiento, donde las diferentes placas colisionan e interactúan entre sí. Esto genera muchas veces deformaciones de la corteza y acumulación de energía, la que en algún momento es liberada de forma repentina en forma de terremotos o erupción de volcanes. Toda esta dinámica hace cambiar constantemente la forma de la corteza, y la comunidad sismológica debe estar constantemente midiendo estos efectos para tener actualizados siempre los registros y estudios de la forma y comportamiento que tiene la corteza, y cómo cambia con cada evento sísmico que ocurre. La forma universal actualmente usada para medir y cuantificar el estado de la corteza y sus capas interiores es usar e interpretar el comportamiento de las ondas sísmicas en el medio. Así, se empezaron a desarrollar diferentes técnicas que usan las ondas sísmicas para observar cómo va cambiando el medio.

Ante esta realidad, la necesidad de usar Interferometría Sísmica nació porque las primeras técnicas que se desarrollaron para medir los cambios de velocidades de las ondas sísmicas en el medio eran muy costosas o demasiado invasivas, que dejaban dañada la zona donde se realizaba el experimento. Nombrando las más comunes:

- **Uso de fuentes explosivas:** Esta técnica es una de las más comunes, la cual se hacía repitiendo varias veces explosiones con una distribución de receptores idéntica. Sin embargo, el problema de esta técnica es que es muy caro realizar explosiones repetitivas, lo que reduce (según la cantidad de recursos) la frecuencia de mediciones en el tiempo, haciendo que el muestro temporal sea pobre. Otro problema que enfrenta es que con cada explosión se genera un daño considerable del área de estudio, hasta que se llega al punto en que ya no es posible medir.
- **Disparos dentro de cuencas hidrográficas:** Para evitar el daño de las explosiones en tierra, se desarrolló este método. Sin embargo, la potencia de los disparos es considerablemente

menor, por lo tanto, el área de estudio disminuye. También se debe tener en cuenta que el costo de cada una de esas mediciones es alto.

- **Coda de Terremotos similares:** Según lo que postuló Poupinet *et al.* (1984), se podría usar la información de la Coda de terremotos con características similares para calcular las variaciones temporales de velocidad de ondas sísmicas. La desventaja es que la ocurrencia de terremotos con mecanismos similares es irregular, lo que conlleva a una pobre cobertura temporal para calcular los cambios de velocidad.

De esta manera, se empezó a desarrollar las Técnicas de Interferometría Sísmica Pasiva (que en la actualidad ya se ha ramificado a muchas aplicaciones dentro de la Sismología e incluso en la Geofísica de Exploración), la cual utiliza los datos del ruido sísmico ambiental para obtener los cambios de velocidad. Esto es beneficioso porque no hay necesidad de generar explosiones costosas que dañan el medio para poder hacer las mediciones, y estas mediciones además son continuas en el tiempo, lo que genera un muy buen muestreo de forma continua, lo que favorece las correlaciones cruzadas de las series de tiempo para obtener los resultados buscados.

## Capítulo 2

# Desarrollo Teórico

Dentro de todas las aplicaciones y tipos de interferometría, en este trabajo se discutirá la Interferometría Pasiva, la cual consiste en la medición y análisis del ruido ambiental para obtener finalmente las variaciones de velocidad de las ondas sísmicas.

Al plantear la teoría de Interferometría Sísmica, se puede decir que la respuesta debido a una fuente puntual es igual a la convolución de la Función de Green con la onda recibida. De esta forma, muchas veces la Interferometría Sísmica también es llamada “Recuperación por Función de Green”.

### 2.1. Utilización de la Función de Green

En esta sección se discutirá a grandes rasgos el porqué se ocupa la Función de Green en el desarrollo de la teoría de la Interferometría. En Sismología, siempre se parte de la base dada en la Ecuación de Onda:

$$\ddot{\phi}(\vec{x}, t) - c^2 \nabla^2 \phi(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

Se nota que la Ecuación de Onda está igualada a una fuerza  $f(\vec{x}, t)$ . Esto significa que no se está estudiando el caso de equilibrio, sino que el sistema está siendo afectado por una fuerza de cuerpo  $f(\vec{x}, t)$  permanente en el tiempo, la cual tiene su fuente en un lugar determinado. Es decir, se está estudiando el caso de la Ecuación de Onda Inhomogénea. Esto es porque en Interferometría Sísmica se necesita de una fuente o distribución de fuentes que estén emitiendo ondas de manera constante y continua, y que puedan ser captados por receptores ubicados en zonas específicas. El ruido sísmico ambiental es el único que cumple con esta característica, ya que eventos como terremotos son esporádicos, por lo tanto, sus señales no son continuas.

Si se considera esta fuerza de cuerpo como un impulso, entonces  $f(\vec{x}, t)$  se puede expresar como dos Deltas de Dirac (una en el tiempo y otra en el espacio), que definen un impulso en el

punto  $\vec{x} = \vec{x}'$  y en el tiempo  $t = t'$ , de tal manera que:

$$f(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t') \quad (2.2)$$

La distribución geométrica del sistema fuente-receptor se muestra en la siguiente figura:

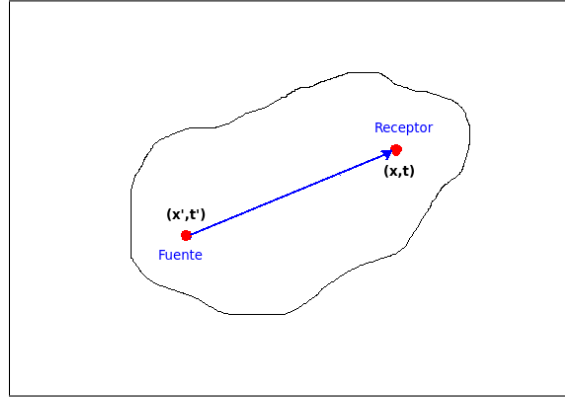


Figura 2.1: Configuración Fuente-Receptor

Luego, se puede considerar una función  $G(\vec{x}, t)$  que es solución de la Ecuación de Onda Inhomogénea cuando se da una situación como la mostrada en la ecuación (2.2). Así, para una fuente ubicada en  $\vec{x} = \vec{x}'$ , en un tiempo  $t = t'$  y un receptor ubicado en una posición  $\vec{x} = \vec{x}$  y que recibe la onda en un tiempo  $t = t$ , la ecuación (2.1) queda como:

$$\ddot{G}(\vec{x}, \vec{x}'; t, t') - c^2 \nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}'; t, t') = \delta(\vec{x} - \vec{x}')\delta(t - t') \quad (2.3)$$

Esta función  $G(\vec{x}, t)$  se denomina Función de Green. Si esta Función de Green se asume conocida, entonces la solución de la ecuación (2.1) es, de manera genérica:

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_V G(\vec{x}, \vec{x}'; t, t') f(\vec{x}', t') d\vec{x}' dt' \quad (2.4)$$

Es decir, este caso no sólo sirve para una fuente puntual, sino también sirve para una distribución de fuentes, las cuales se suman dentro de un volumen  $V$ , en un lapso de tiempo continuo que puede ser acotado, o simplemente infinito. Es decir, la gran utilidad de la Función de Green es que con su inclusión en los cálculos ya no es necesario resolver la Ecuación de Onda Inhomogénea con los métodos comunes de resolución de Ecuaciones Diferenciales Parciales, que de hecho tienen gran dificultad, sino que ahora sólo basta integrar para conocer la solución  $\phi$ .

## 2.2. Base geométrica y teórica de la Interferometría

Se estudiarán dos casos, la Interferometría de Onda Directa, y la Interferometría de la Coda.

### 2.2.1. Interferometría de Onda Directa

Antes de estudiar la Interferometría de la Coda Sísmica, es más útil e intuitivo ver la metodología desde un punto de vista un poco más simple, el cual consiste en visualizar la interacción de las ondas entre la fuente y receptor en una dimensión. Se tiene la configuración dada en la Figura 2.2 (extraída de Wapenaar *et al.*, 2010), donde hay una fuente situada en  $x = x_S$  y dos receptores A y B situados en  $x = x_A$  y  $x = x_B$  respectivamente. Desde la fuente sale un frente de ondas planas en un tiempo  $t = 0$  en dirección hacia los receptores:

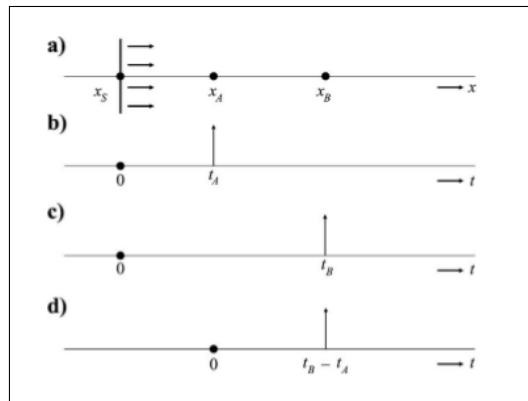


Figura 2.2: Interferometría en una dimensión

En el gráfico (a) se muestra un frente de ondas con una fuente en  $x = x_S$  que sale en un tiempo  $t = 0$  a una velocidad  $c$ . En el gráfico (b), se describe la respuesta observada en la estación A, en forma de impulso. El gráfico (c) muestra la respuesta para estación B, y el gráfico (d) muestra el resultado de la correlación cruzada entre las respuestas en A y B.

Así, cuando lleguen las ondas desde la fuente en  $x_S$  a los receptores A y B, éstos percibirán el impulso, a lo cual se le llama la respuesta del receptor a la señal emitida en la fuente. Luego, esta respuesta, tal como se explicó en la ecuación (2.3) se puede expresar como la Función de Green que representa la perturbación producida por la fuente, la cual es recibida por el receptor. Así:

- $G(x_A, x_S, t)$  es la respuesta captada en la estación  $x_A$  a la señal originada en  $x_S$
- $G(x_B, x_S, t)$  es la respuesta captada en la estación  $x_B$  a la señal originada en  $x_S$

Pero en la formulación del problema, se asumió que de la fuente salía un impulso en forma de Delta de Dirac. De esta manera, la señal que recibirá el receptor también será un impulso, el cual es recibido en un tiempo  $t = t_A$  para la estación situada en  $x_A$  (Figura 2.2 (b)) y en un tiempo  $t = t_B$  para la estación en  $x_B$  (Figura 2.2 (c)). De esta manera, se puede hacer la igualdad:

- $G(x_A, x_S, t) = \delta(t - t_A)$ , con  $t_A = \frac{x_A - x_S}{c}$  y  $c$  la velocidad de las ondas.
- $G(x_B, x_S, t) = \delta(t - t_B)$ , con  $t_B = \frac{x_B - x_S}{c}$  y  $c$  la velocidad de las ondas.

Luego, para obtener la función de Green que existe entre las estaciones A y B es necesario hacer la correlación cruzada entre las señales recibidas. Se puede notar en la Figura 2.2 (a) que las señales recibidas en A y en B tienen el tramo de  $x_S$  a  $x_A$  en común, el cual al hacer el cálculo de la correlación cruzada se cancelará, dejando para el análisis sólo el tramo entre  $x_A$  y  $x_B$ , por eso, la respuesta que se ve en la Figura 2.2 (d) es un impulso en el tiempo  $t_B - t_A$ , que corresponde al tiempo de viaje entre  $x_A$  y  $x_B$ . La gran ventaja de esta técnica es que con esta nueva configuración se puede considerar que ese impulso es la respuesta recibida por el receptor en  $x_B$ , como si la fuente estuviera en  $x_A$ , es decir, se genera una fuente virtual, que es el origen del nombre de Interferometría Pasiva (no se hacen fuentes físicas como en Sismología activa). Además se puede notar que ya no es necesario para efectos de cálculo conocer la ubicación de la fuente original ni tampoco el tiempo absoluto en el cual ocurrió la salida de las ondas. Esta respuesta se puede expresar en términos de la Función de Green del receptor  $x_B$  debido a una fuente en  $x_A$ :

- $G(x_B, x_A, t)$  es la respuesta captada en la estación  $x_A$  a la señal originada en  $x_B$

Expresando lo anterior de manera matemática, se tiene que la definición de Correlación Cruzada para dos funciones  $f$  y  $g$  está dada por la siguiente ecuación:

$$CC_{fg}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t+t')dt \quad (2.5)$$

Es decir, la función  $g(t)$  se desplaza un tiempo  $t'$  en relación a  $f(t)$ . De esta manera, la correlación cruzada entre las funciones de Green en A y B sería, con  $G(x_B, x_S, t) = f(t)$  y  $G(x_A, x_S, t) = g(t)$

$$G(x_B, x_S, t) * G(x_A, x_S, -t) = f(t) * g(-t) = CC_{fg} \quad (2.6)$$

El operador asterisco en la ecuación (2.6) denota convolución de las dos series. Por eso, se invierte en el tiempo la segunda serie para dejar la operación como una correlación cruzada. De esta forma, de acuerdo a la ecuación (2.5), de manera genérica se puede escribir:

$$f(t) * g(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t+t')dt \quad \text{haciendo la sustitución: } t'' = t' - t \quad (2.7)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t''+t)g(t'')dt'' \quad (2.8)$$

Así, la ecuación (2.6) queda:

$$G(x_B, x_S, t) * G(x_A, x_S, -t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_B, x_S, t+t')G(x_A, x_S, t')dt' \quad (2.9)$$

Sustituyendo por las Deltas de Dirac que se obtuvieron anteriormente:

$$G(x_B, x_S, t) * G(x_A, x_S, -t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t'-t_B)\delta(t'-t_A)dt'$$

Ocupando la propiedad de la Delta de Dirac:  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$ , se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+t'-t_B)\delta(t'-t_A)dt' = \delta(t-(t_B-t_A)) = \delta\left(t - \frac{(x_B-x_A)}{c}\right) = G(x_B, x_A, t) \quad (2.10)$$

Así, queda para este caso que:

$$G(x_B, x_S, t) * G(x_A, x_S, -t) = G(x_B, x_A, t) \quad (2.11)$$

En la realidad, la fuente no emite un impulso, sino que emite ondas de distintas formas. Si la función fuente está definida por alguna ondeleta  $s(t)$ , entonces las respuestas en  $x_A$  y  $x_B$  se pueden escribir como:  $u(x_A, x_S, t) = G(x_A, x_S, t) * s(t)$  y  $u(x_B, x_S, t) = G(x_B, x_S, t) * s(t)$ , de tal manera que la ecuación (2.11) queda (asterisco denota convolución):

$$G(x_B, x_A, t) * S_s(t) = u(x_B, x_S, t) * u(x_A, x_S, -t) \quad (2.12)$$

Con  $S_s(t)$  la autocorrelación de la ondeleta  $s(t)$ , es decir:  $S_s(t) = s(t) * s(-t)$ . La ecuación (2.12) quiere decir que si la función fuente está definida por una ondeleta en vez de un impulso, entonces la correlación cruzada de las respuestas queda definida por la convolución de función de Green entre los receptores y la autocorrelación de la función fuente.

¿Cómo se puede visualizar esto?

Wapenaar *et al.* 2010 lo explica muy bien con el siguiente ejemplo, considerando dos estaciones separadas por 1200 [m] de distancia, se registró una señal en la estación mas cercana a la fuente (Figura 2.3 (a)) la que luego llegó a la estación mas lejana un tiempo después (Figura 2.3 (b)). Se obtuvo la siguiente figura:

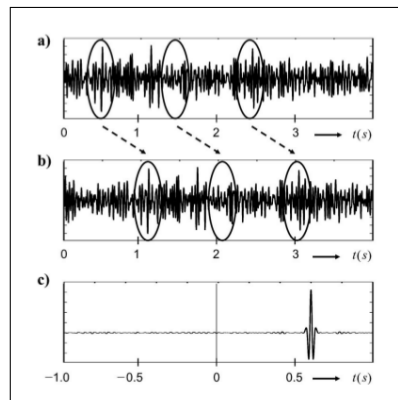


Figura 2.3: Ejemplo de detección de velocidades mediante correlaciones cruzadas

El gráfico de la Figura 2.3 (c) es la Correlación Cruzada entre las señales en (a) y en (b), donde se ve que el retardo entre las dos estaciones es de 0.6 [s] aproximadamente. Esto implica que la velocidad de las ondas es de 2000 [m/s]. Como se ve, esta es la gran utilidad de este método para detectar velocidades mediante las correlaciones cruzadas, explicado a escala simple.



Ahora, se puede poner mas dificultad al problema y considerar la existencia de otra fuente en una posición  $x'_S$ , tal que:

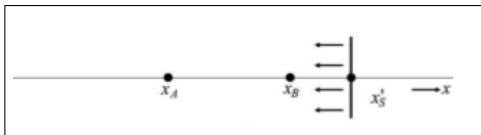


Figura 2.4: Nueva configuración para  $x'_S$

Haciendo un desarrollo similar al que se hizo para  $x_S$ , para las ondas generadas por  $x'_S$  en el sistema de referencia considerado, se obtiene:

$$G(x_B, x_A, -t) = G(x_B, x'_S, t) * G(x_A, x'_S, -t) \quad (2.13)$$

Donde se nota tiempo inverso en  $G(x_B, x_A, -t)$ , lo que significa que las ondas están viajando en dirección contraria según el sistema de referencia usado. Ahora, si se considera la suma de los efectos de ambas fuentes en  $x_S$  y  $x'_S$ , entonces las correlaciones cruzadas se calculan por separado, y luego esos resultados se suman. Así, asumiendo que su función es un impulso, entonces las correlaciones cruzadas de ambas fuentes se suman. Así, sumando las ecuaciones (2.11) y (2.13), se obtiene:

$$G(x_B, x_A, t) + G(x_B, x_A, -t) = \sum_{i=1}^2 G(x_B, x'_S, t) * G(x_B, x'_S, -t) \quad (2.14)$$

La que se puede escribir también de la siguiente forma si la función fuente es una función  $s(t)$  distinta de un impulso:

$$\{G(x_B, x_A, t) + G(x_B, x_A, -t)\} * S_s(t) = \sum_{i=1}^2 u(x_B, x'_S, t) * u(x_B, x'_S, -t) \quad (2.15)$$

Si las fuentes actúan de manera simultánea, el procedimiento es un poco diferente. Las respuestas para una fuente con función  $s(t)$  serían:

- $u(x_A, t) = \sum_{i=1}^2 G(x_A, x'_S, t) * s(t)$  Para el receptor A
- $u(x_B, t) = \sum_{j=1}^2 G(x_B, x'_S, t) * s(t)$  Para el receptor B

Se puede notar que la suma de las dos fuentes se hace para la respuesta de cada receptor antes de hacer las correlaciones cruzadas, mientras que en la derivación de las ecuaciones (2.14) y (2.15) se sumaron las dos fuentes luego de hacer las correlaciones cruzadas separadas para cada una.

Asumiendo esta configuración, entonces el sistema quedará como lo muestra la Figura 2.5:

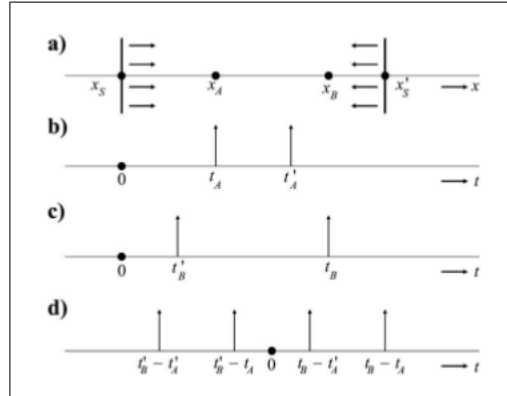


Figura 2.5: Configuración para fuentes simultáneas

El gráfico mostrado en la Figura 2.5 (d) muestra los resultados de las correlaciones cruzadas de ambas señales. Se puede notar que los impulsos en  $t'_B - t'_A$  y  $t_B - t'_A$  no tienen significado físico para este caso, ya que se está considerando que las fuentes en  $x_S$  y  $x'_S$  no están correlacionadas (que es una de las suposiciones del ruido sísmico), así que uno puede eliminar esos términos cruzados. Así, suponiendo que la función fuente es ruido sísmico, entonces se denotará  $s(t) = N(t)$ , quedando que la respuesta en  $x_A$  a las dos fuentes es  $u(x_A, t) = \sum_{i=1}^2 G(x_A, x_S^i, t) * N_i(t)$  y la respuesta en  $x_B$  es  $u(x_B, t) = \sum_{i=1}^2 G(x_B, x'_S, t) * N_i(t)$ :

$$\langle u(x_B, t) * u(x_A, -t) \rangle = \langle \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 G(x_B, x_S^j, t) N_j(t) * G(x_A, x_S^i, t) N_i(t) \rangle \quad (2.16)$$

Lo que muestra la ecuación (2.16) es simplemente la correlación cruzada de las ondas que pasan tanto por la estación A como por la estación B. Es decir, se perciben las dos fuentes pasando por cada estación, se suman, y luego se correlacionan. Finalmente, como aplicación de estas ecuaciones se pueden obtener los gráficos mostrados en la Figura 2.6:

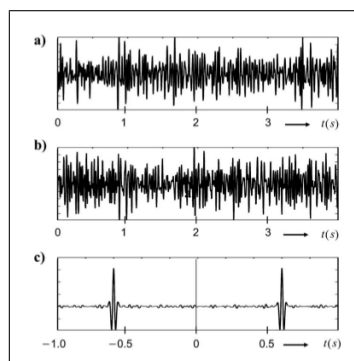


Figura 2.6: Configuración para fuentes simultáneas usando señales de ruido

Donde se consideran fuentes simultáneas desde los dos lados, y el resultado de las correlaciones cruzadas es el mostrado en el gráfico de la Figura 2.6 (c).

### 2.3. Expansión a 2-D

El caso anterior era una idealización en una dimensión, con el objetivo de explicar con mayor facilidad en qué consiste la interferometría a rasgos muy simples. Sin embargo, en la realidad al estudiar Interferometría Pasiva, se está estudiando el ruido sísmico proveniente de diversas fuentes no correlacionadas aleatorias que están distribuidas espacialmente alrededor de los receptores. En la realidad, sucede lo que muestra la Figura 2.7:

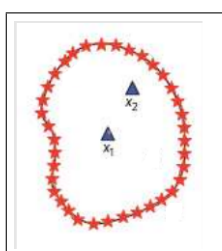


Figura 2.7: Distribución de fuentes alrededor de las estaciones

De esta forma, Christoph Sens-Schönfelder en su presentación de Interferometría hecha en Concepción el año 2011 presenta una Figura muy ilustrativa sobre cómo funciona la teoría presentada para una y dos fuentes en la sección anterior aplicada a una distribución continua de fuentes alrededor de los dos receptores, de tal manera que llegan señales desde todos lados, pero la correlación cruzada de esas señales, a pesar de que son muchas fuentes generando ondas que llegan a las dos estaciones, igual se muestran dos peaks de la misma forma que los mostrados en la Figura 2.6 (c). Esto es porque la mayor contribución a la correlación cruzada la dan precisamente las fuentes que emiten en la misma línea recta que une las dos estaciones (señaladas por las flechas rojas en la Figura 2.8), y las fuentes que emiten ondas con una trayectoria diferente a ese ángulo se irán cancelando con las otras que vienen de la otra dirección, como muestra la siguiente figura:

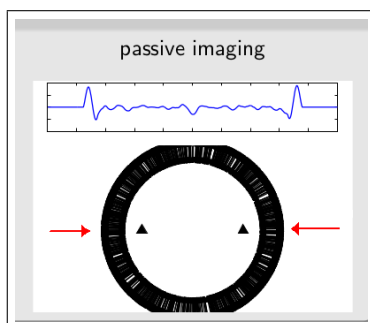


Figura 2.8: Correlación cruzada para una distribución de fuentes

## 2.4. Teoría de la Coda de las Ondas Sísmicas

Con la base anterior comprendida, en esta sección se explicará la teoría que explica cómo se obtienen los resultados que se esperan para este trabajo, es decir, las variaciones de velocidad. En esta sección se presenta la teoría dada por Roel Snieder en su paper "The Theory of Coda Wave Interferometry" del 2006, donde explica porqué la información contenida en la Coda de las Ondas resultantes de la Correlación Cruzada del ruido sísmico es útil para saber las variaciones de velocidad, esto es porque la Coda de las Ondas Sísmicas son muy sensitivas a los cambios en la sub-superficie debido a la fuerte dispersión generada por las múltiples reflexiones, refracciones y transmisiones que las ondas sufren al pasar por las distintas capas de la sub-superficie.

¿Qué es la Coda de las Ondas?

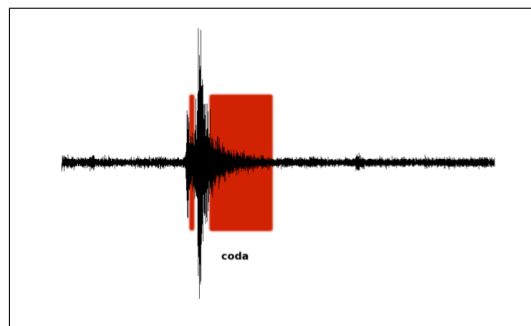


Figura 2.9: *La Coda*

En una señal sismológica, la coda es la última parte de una señal sísmica, es lo que sigue a la llegada repentina de la onda directa y que tiene un decaimiento exponencial de amplitud debido principalmente a que la energía que llega en la coda de la señal son fases sísmicas más complejas debido a que sufren constantes reflexiones, refracciones y transmisiones en el medio, lo que hace que su amplitud disminuya, pero que también tengan la información de las capas por las cuales han pasado. Así, en un medio fuertemente dispersivo (con muchas heterogeneidades), las ondas pasan repetidamente por la misma región en el espacio, haciéndolas sensitivas a las heterogeneidades que existan, y por lo tanto, cualquier cambio en el medio hará que haya cambios en las ondas que son parte de la Coda. De esta manera, el medio actúa como un interferómetro natural de ondas.

### 2.4.1. Interferometría Pasiva usando la Coda de las Ondas

Como se dijo en secciones anteriores, la Coda es altamente sensitiva a los cambios en el medio sub-superficial. Debido a esta característica se puede extraer gran cantidad de información del medio usando esta sección de las ondas elásticas. La teoría que se presentará está basada en el trabajo de Snieder (2006), la cual es la forma general de presentar la teoría de Interferometría de la Coda, ya que a partir de esta formulación se pueden hacer diferentes arreglos para aplicarlos a diferentes tipos de aplicaciones que ocupen Interferometría.

Ésta metodología está basada en la suma de todos los caminos que las ondas podrían recorrer hasta llegar a un punto determinado. Así, se puede caracterizar todo el campo de ondas en un punto determinado mediante la suma de las ondas que se propagan por todos los caminos posibles para llegar a ese punto (gráficamente es lo mismo que describe la Figura 2.8). Así, se puede escribir:

$$u(t) = \sum_P S_P(t) \quad (2.17)$$

Donde  $u(t)$  es el campo de ondas, y  $S_P$  son cada una de las ondas que se propagan por su respectivo camino  $P$ . Esta expresión considera todos los tipos de onda, es decir, las Ondas Directas, las Ondas Dispersadas de manera singular y las Ondas Dispersadas de manera múltiple, de tal manera que las Ondas Directas llegan primero, y luego llegan las dispersadas por las heterogeneidades del medio (las cuales constituirán la Coda de la señal). Todo esto asumiendo que los elementos que producen la dispersión son heterogeneidades en el medio (cuerpos de densidad diferente), y las reflexiones de ondas ocasionadas en los límites de las diferentes capas bajo la superficie.

Ahora, considerando que hay una perturbación del medio, ya sea que la distancia entre dos heterogeneidades (objetos) cambia, o la velocidad de las ondas cambia, entonces el cambio en la fase de las ondas es el parámetro mas importante a considerar, siempre y cuando la longitud media de todos los caminos recorridos por las ondas sean considerablemente mas grandes que la longitud de onda de éstas. De esta manera, si la perturbación del medio es no dispersiva en la banda de frecuencias de ondas considerada, entonces habrá un cambio en el tiempo de arribo de las ondas. Así, se puede denotar otra expresión para el medio perturbado:

$$\tilde{u}(t) = \sum_P S_P(t - \tau_P) \quad (2.18)$$

Donde la única diferencia con la ecuación (2.17) que describe el medio no perturbado, es que con la perturbación del medio habrá un cambio en el tiempo de arribo de las ondas, denotado por  $\tau_P$ , el cual depende, en general, del camino  $P$  que tome la onda. En el caso de las ondas Coda recibidas en un punto específico durante una ventana de tiempo determinada, corresponden a la interferencia de todas las  $S_P$  que llegan en esa ventana, así la perturbación en el tiempo de viaje de las ondas se puede describir como una dictribución de llegadas.

Así, para poder comparar las expresiones del medio perturbado y no perturbado, se usa el Coeficiente de Correlación, que en este caso medirá la correlación que hay entre las ondas del medio no perturbado con las ondas del medio perturbado. De esta forma, se define este coeficiente como:

$$R(t_s) = \frac{\int_{t-T}^{t+T} u(t') \tilde{u}(t' + t_s) dt'}{\sqrt{\int_{t-T}^{t+T} u^2(t') dt' \int_{t-T}^{t+T} \tilde{u}^2(t') dt'}} \quad (2.19)$$

Donde  $t_s$  es el tiempo en que la serie del medio perturbado se desplaza con respecto a la serie que representa en medio no perturbado (correlación cruzada), donde en este caso la correlación

se hace durante una ventana de tiempo  $2T$ , ya que los límites van desde  $-T$  hasta  $T$ , centrados en  $t$ .

Analizando el numerador de la ecuación (2.19):

$$N(t_s) = \int_{t-T}^{t+T} u(t') \tilde{u}(t' + t_s) dt' \quad (2.20)$$

Si se insertan las ecuaciones (2.17) y (2.18) en la ecuación (2.20), aparecerán dobles sumatorias  $\sum_{PP'}$ . Las dobles sumatorias pueden ser escritas en forma matricial, en este caso  $P$  (camino para el medio no perturbado) puede ser el número de filas y  $P'$  (camino para el medio perturbado) el número de columnas. De esta forma, se puede separar en términos diagonales y términos cruzados, tal que:

$$\sum_{PP'} (\dots) = \sum_{P=P'} (\dots) + \sum_{P \neq P'} (\dots) \quad (2.21)$$

De esta manera, reemplazando (2.17) y (2.18) en (2.20), y usando la forma dada en la ecuación (2.21), queda:

$$\begin{aligned} N(t_s) &= \sum_P \sum_{P'} \int_{t-T}^{t+T} S_P(t') S_{P'}(t' + t_s - \tau_P) dt' \\ \Rightarrow N(t_s) &= \sum_{P=P'} \int_{t-T}^{t+T} S_P(t') S_P(t' + t_s - \tau_P) dt' + \sum_{P \neq P'} \int_{t-T}^{t+T} S_P(t') S_{P'}(t' + t_s - \tau_P) dt' \end{aligned} \quad (2.22)$$

En este caso, no tiene sentido físico comparar los términos cruzados ( $P \neq P'$ ), ya que se estarían comparando "peras con manzanas" literalmente. Sólo es posible establecer una comparación de las ondas que pasaron por los mismos caminos tanto antes como después de la perturbación. Además, otro argumento para sostener esta aproximación es el dado por Snieder (2004), en el cual demostró que para datos multicromáticos en frecuencias, al aumentar la longitud de la ventana en la correlación (límites de integración en la ecuación (2.19)), los términos cruzados tendían a cero. Luego, asumiendo estos supuestos, la ecuación (2.22) se puede escribir de la siguiente manera:

$$N(t_s) = \sum_{P=P'} \int_{t-T}^{t+T} S_P(t') S_P(t' + t_s - \tau_P) dt' = \sum_P \int_{t-T}^{t+T} S_P(t') S_P(t' + t_s - \tau_P) dt' \quad (2.23)$$

Luego, se puede escribir la integral de la ecuación (2.23) como la suma de las correlaciones cruzadas, donde en este caso el desfase entre una serie y otra es de  $t_s - \tau_P$ . De esta manera, se puede definir esta suma de correlaciones cruzadas como:

$$C_P(t_s - \tau_P) \equiv \int_{t-T}^{t+T} S_P(t') S_P(t' + t_s - \tau_P) dt' \quad (2.24)$$

Y la ecuación (2.23), que corresponde al numerador del Coeficiente de Correlación  $R(t_s)$  queda de la forma:

$$N(t_s) = \sum_P C_P(t_s - \tau_P) \quad (2.25)$$

De la misma forma se pueden tratar los términos del denominador:

$$\begin{aligned}
 D(t_s) &= \sqrt{\int_{t-T}^{t+T} u^2(t')dt' \int_{t-T}^{t+T} \tilde{u}^2(t')dt'} \quad \text{Reemplazando (2.17) y (2.18)} \\
 \Rightarrow D(t_s) &= \sqrt{\sum_P \int_{t-T}^{t+T} S_P^2(t')dt' \sum_P \int_{t-T}^{t+T} S_P^2(t' - \tau_P)dt'} \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Se nota que en este caso, para cada uno de los dos términos, las funciones están elevadas al cuadrado, es decir, multiplicadas por sí mismas. Así, son correlaciones cruzadas sin desfase (en comparación a la ecuación 2.24). Por lo tanto, de la misma forma en que se escribió la ecuación (2.24), se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 \sum_P \int_{t-T}^{t+T} S_P^2(t')dt' &= \sum_P \int_{t-T}^{t+T} S_P(t')S_P(t')dt' \quad \text{con: } C_P(0) \equiv \int_{t-T}^{t+T} S_P(t')S_P(t')dt' \\
 \sum_P \int_{t-T}^{t+T} S_P^2(t' - \tau_P)dt' &= \sum_P \int_{t-T}^{t+T} S_P(t' - \tau_P)S_P(t' - \tau_P)dt' \quad \text{con: } C_P(0) \equiv \int_{t-T}^{t+T} S_P(t' - \tau_P)S_P(t' - \tau_P)dt'
 \end{aligned}$$

De esta forma, la expresión para el denominador queda:

$$D(t_s) = \sqrt{\sum_P C_P(0) \sum_P C_P(0)} \Rightarrow D(t_s) = \sum_P C_P(0) \quad (2.27)$$

De esta manera, el coeficiente  $R(t_s)$  escrito en términos de las ecuaciones (2.25) y (2.27) queda de la forma:

$$R(t_s) = \frac{\sum_P C_P(t_s - \tau_P)}{\sum_P C_P(0)} \quad (2.28)$$

Ahora, es necesario introducir otra aproximación. Luego, si la ecuación (2.24) se escribe en el dominio de la frecuencia aplicándole la Transformada de Fourier, se obtiene:

$$C_P(\omega) = |S_P(\omega)|^2 \quad (2.29)$$

(La demostración matemática de cómo se llega a la ecuación (2.29) a partir de la (2.24) se encuentra en el Apéndice de este informe).

Se considerará que las ondas que se propagan a través de diferentes trayectorias tienen un espectro de potencia con la misma forma, pero la amplitud total de cada una de las ondas se puede asumir diferente, ya que las ondas tienen tiempos de arribo diferentes y también pueden tener diferentes formas. Es decir, las amplitudes  $I$  van cambiando para cada camino  $P$ . Como se está analizando la coda de las ondas (ondas dispersivas), esta aproximación sólo puede ser real si las ondas dispersivas que llegan en una determinada ventana de tiempo experimentan el mismo número de eventos dispersivos (por lo tanto, la ventana de tiempo no puede ser muy grande). De esta forma, al calcular la Transformada Inversa de Fourier (desde frecuencia a tiempo) de la ecuación (2.29), se obtiene:

$$C_P(t) = I_P C(t) \quad (2.30)$$

Donde  $C(t)$  es la autocorrelación de  $S_P(t)$  (lo que se obtiene por la aproximación asumida), la cual está normalizada a su máximo cuando  $t = 0$ , es decir,  $C(0) = 1$ .  $I_P$ , como se dijo anteriormente, mide la

intensidad de las ondas que se propagan a través de cada camino  $P$ , la cual puede ser diferente para cada uno de ellos. Luego, reemplazando la ecuación (2.30) en (2.28), el coeficiente  $R(t_s)$  queda de la forma:

$$R(t_s) = \frac{\sum_P I_P C(t_s - \tau_P)}{\sum_P I_P} \quad (2.31)$$

Luego, asumiendo que las perturbaciones en los tiempos de viaje no cambian considerablemente entre los diferentes caminos de todos los arribos en la ventana de tiempo considerada, se puede describir la autocorrelación  $C(t)$  con una serie de Taylor de segundo orden. Se usa de segundo orden porque la Autocorrelación es una función par. Si  $C(0) = 1$  (como se describió a partir de la ecuación 2.30), entonces, la serie de Taylor queda:

$$\begin{aligned} C(t) &= C(a) + \frac{f'(a)}{1!}(t-a) + \frac{f''(a)}{2!}(t-a)^2 + \dots && \text{Si: } a=0 \\ &= C(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \dots && \text{Si } C(t) \text{ es par y de segundo orden} \\ &= C(0) + \frac{f''(0)}{2!}t^2 && \text{Pero: } C(0)=1 \\ &= 1 + \frac{1}{2}\ddot{C}(0)t^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Si se considera el caso de que no hay cambio de tiempos de llegada, es decir  $\tau_P = 0$ , entonces la ecuación (2.31) se reduce a:

$$R(t_s) = C(t_s) \quad (2.33)$$

Si  $\tau_P = 0$ , entonces no hay perturbación del campo de ondas, esto implica que  $u = \tilde{u}$  en la ecuación (2.19). De esta forma, con esta aproximación, y reemplazando  $t_s$  por  $t$ ,  $R(t_s)$  en la forma de la ecuación (2.19) queda como:

$$R(t) = C(t) = \frac{\int u(t')u(t'+t)dt'}{\int u^2(t')dt'} \quad (2.34)$$

El intervalo de integración sigue siendo desde  $t - T$  hasta  $t + T$ . Diferenciando (2.34) dos veces con respecto a  $t$ , se obtiene:

$$\ddot{C}(t) = \frac{\int u(t') \frac{d^2 u(t'+t)}{dt^2} dt'}{\int u^2(t') dt'} \quad (2.35)$$

Desarrollando el numerador de (2.35) mediante el método de Integración por Partes:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2.36)$$

Definiendo:

$$\begin{aligned} u &= u(t') \Rightarrow du = \dot{u}(t') dt' \\ dv &= \frac{d}{dt}(\dot{u}(t'+t)) \Rightarrow v = \dot{u}(t'+t) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int u dv &= uv - \int v du \\ \Rightarrow \int u(t') \frac{d}{dt}(\dot{u}(t'+t)) &= u(t')\dot{u}(t'+t) - \int \dot{u}(t'+t)\dot{u}(t') dt' \end{aligned} \quad (2.37)$$



Si se asume que el desfase es cero, es decir, se transforma en Autocorrelación (con el objetivo de insertar este desarrollo en la Serie de Taylor dada por la ecuación (2.32)), entonces con  $t = 0$  la ecuación (2.37) queda:

$$\int u(t') \frac{d}{dt} (\dot{u}(t')) = u(t') \dot{u}(t') - \int \dot{u}^2(t') dt' \quad (2.38)$$

La expresión  $u(t') \dot{u}(t')$  en la ecuación (2.38) se evalúa en los límites de integración, que corresponden a la ventana de tiempo considerada. Para suprimir el efecto del truncamiento repentino en los límites de la ventana, es mejor aplicar la función "taper", es decir, una disminución gradual de las amplitudes hasta que lleguen a cero en los límites de la ventana. Así,  $u(t') \dot{u}(t')$  evaluado en los extremos es cero. De esta forma, el numerador de  $\ddot{C}(t)$ , con  $t = 0$  queda de la siguiente forma:

$$\int u(t') \frac{d}{dt} (\dot{u}(t')) = - \int \dot{u}^2(t') dt' \quad (2.39)$$

Así, finalmente queda:

$$\ddot{C}(0) = - \frac{\int \dot{u}^2(t') dt'}{\int u^2(t') dt'} \quad (2.40)$$

Se puede notar que la ecuación (2.40) tiene unidades de frecuencia, ya que esta expresión a través de la Transformada de Fourier en el dominio de la frecuencia se puede escribir como  $\ddot{C}(t) = \bar{\omega}^2 \ddot{C}(\omega)$ ; lo que significa que en todo el rango de tiempo de la ventana llegan señales con diferentes frecuencias, y de toda esa información se toma el promedio de todas las frecuencias. Por lo tanto, se puede definir como:

$$\bar{\omega}^2 \equiv \frac{\int \dot{u}^2(t') dt'}{\int u^2(t') dt'} = -\ddot{C}(0) \quad (2.41)$$

Esto se podría determinar directamente de los datos que se están usando, haciendo un análisis en frecuencias. Usando la ecuación (2.41) en la ecuación (2.32), se obtiene:

$$C(t) = 1 - \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 t^2 \quad (2.42)$$

Insertando este resultado en la ecuación (2.31):

$$\begin{aligned} R(t_s) &= \frac{\sum_P I_P \left[ 1 - \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 (t_s - \tau_P)^2 \right]}{\sum_P I_P} \\ &= \frac{\sum_P I_P}{\sum_P I_P} - \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 \frac{\sum_P I_P (t_s - \tau_P)^2}{\sum_P I_P} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 \frac{\sum_P I_P (t_s - \tau_P)^2}{\sum_P I_P} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ahora, es necesario conocer en qué valor de  $t_s$  el coeficiente  $R(t_s)$  es máximo. Esto se obtiene derivan-

do  $R(t_s)$  con respecto a  $t_s$ , y se iguala a cero, de tal manera que:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{dR(t_s)}{dt_s} &= -\tilde{\omega}^2 \frac{\sum_P I_P(t_s - \tau_P)}{\sum_P I_P} \\
&= -\frac{\sum_P I_P(t_s - \tau_P)}{\sum_P I_P} \\
&= -t_s \frac{\sum_P I_P}{\sum_P I_P} + \frac{\sum_P \tau_P I_P}{\sum_P I_P} \\
&= -t_s + \frac{\sum_P \tau_P I_P}{\sum_P I_P} \tag{2.44}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_s = t_{max} = \frac{\sum_P \tau_P I_P}{\sum_P I_P} \tag{2.45}$$

Luego, en un  $t_s = t_{max}$  dado por la ecuación (2.45) se encuentra el coeficiente  $R(t_s)$  máximo. La ecuación (2.45) señala que el Coeficiente de Correlación alcanza su máximo en un desfase que es igual a la intensidad ponderada de las perturbaciones de tiempo de viaje.

Como se dijo al principio de este desarrollo, se puede considerar que las perturbaciones de los tiempos de viaje de las ondas que llegan en una determinada ventana de tiempo tienen una distribución determinada. La determinación de esta distribución está desarrollada en el apéndice, donde se inicia la demostración con la ponderación normalizada de la energía para llegar a la ecuación (3.14), que establece que:

$$\langle f(\tau) \rangle \equiv \frac{\sum_P f(\tau_P) I_P}{\sum_P I_P} \tag{2.46}$$

Se puede notar la similitud del lado derecho de la ecuación (2.46) con el lado derecho de la ecuación (2.45). De esta forma, se puede ver que  $f(\tau_P)$  en este caso es  $\tau_P$ , entonces se puede escribir la ecuación (2.45) como:

$$\langle \tau \rangle = \frac{\sum_P \tau_P I_P}{\sum_P I_P} \tag{2.47}$$

Esto implica que:

$$t_{max} = \langle \tau \rangle \tag{2.48}$$

## 2.4.2. Aplicación al cálculo de los cambios de velocidad de las ondas sísmicas

Si se quiere usar la teoría presentada en la sección anterior para conocer y calcular los cambios de velocidad de las ondas sísmicas en el medio, se debe proceder desarrollando la teoría de la siguiente manera:

Suponiendo que se tiene un medio con velocidad  $v(\vec{r})$ , el cual es perturbado con una perturbación  $\delta v(\vec{r})$ , donde la velocidad relativa de perturbación  $\frac{\delta v}{v}$  es la misma en cada punto del espacio. El tiempo de viaje para el medio no perturbado es:

$$t_P = \int_P \frac{1}{v} ds \tag{2.49}$$

Donde la integración es a lo largo del camino  $P$ . De la misma forma, el tiempo de viaje del medio perturbado será:

$$t_P + \tau_P = \int_P \frac{1}{v + \delta v} = \int_P \frac{1}{v \left(1 + \frac{\delta v}{v}\right)} ds \tag{2.50}$$

Considerando la siguiente aproximación:  $(1 + x)^n = 1 + nx + \dots$ . En este caso  $n = -1$  y  $x = \frac{\delta v}{v}$ , entonces:

$$\begin{aligned} t_P + \tau_P &= \int_P \frac{1}{v} \left(1 - \frac{\delta v}{v}\right) ds = \int_P \left(\frac{1}{v} - \frac{\delta v}{v^2}\right) ds \\ &= \int_P \frac{1}{v} ds - \int_P \frac{1}{v} \frac{\delta v}{v} ds \end{aligned} \quad (2.51)$$

Luego, a partir de la igualdad (2.51), se tiene que:

$$\tau_P = - \int_P \frac{1}{v} \frac{\delta v}{v} ds \quad (2.52)$$

Luego, hay que hacer una suposición muy importante en el desarrollo del estudio de los cambios de velocidades y que simplifica el problema. Se considerará que el cambio de velocidad  $\frac{\delta v}{v}$  es constante a lo largo de toda la trayectoria  $P$ , es decir, el cambio es constante espacialmente. Entonces:

$$\tau_P = - \frac{\delta v}{v} \int_P \frac{1}{v} ds \quad (2.53)$$

Pero:  $t_P = \int_P \frac{1}{v} ds$ . Reemplazando  $t_P$  por  $t$ , que es el tiempo en el centro de la ventana de tiempo considerada (ya que se está considerando como la media de los tiempos de llegada de las ondas que llegan en esa ventana de tiempo), se tiene que:

$$\tau_P = - \frac{\delta v}{v} t \quad (2.54)$$

De esta forma, según la expresión (2.54), la perturbación de tiempo de viaje depende del tiempo de llegada de la onda solamente, pero es independiente del camino tomado. Así, para una ventana de tiempo pequeña, la media de la perturbación del tiempo de viaje es dada por:

$$t_{max} = \langle \tau \rangle = - \frac{\delta v}{v} t \Rightarrow \boxed{\frac{\delta v}{v} = - \frac{\langle \tau \rangle}{t}} \quad (2.55)$$

Finalmente, mediante la ecuación (2.55) se cuantifica el cambio de velocidad buscado, el cual se da en un  $\langle \tau \rangle$  tal que  $R(t_s)$  (ecuación (2.43)) sea máximo.

## 2.5. Aplicación de la Teoría de Interferometría Pasiva de Onda Coda

En esta sección se explicará cómo la teoría presentada en las secciones anteriores se aplica a datos reales de aplicaciones de Interferometría Sísmica Pasiva usando datos de la Coda de las Ondas. El Procedimiento es el siguiente:

En primer lugar, si se tiene una red de dos o mas estaciones monitoreando una zona, se escogen pares de estaciones a analizar. Las señales que perciben estas estaciones tienen en su información tanto ruido ambiental como señales de terremotos y eventos menores con una fuente específica que pueden haber ocurrido tanto en la zona de estudio como en cualquier otra parte del planeta. Como en Interferometría Pasiva se quiere estudiar solamente el ruido sísmico ambiental, entonces las señales crudas se

tratan numéricamente para extraer todos los eventos (como terremotos, respuesta del instrumento, etc.) que no correspondan a ruido ambiental, lo cual se hace con normalizaciones, blanqueado espectral y filtraje en frecuencia. Esto se hace para cada una de las dos estaciones a analizar.

Luego, con las señales limpiadas y sólo con ruido ambiental de las estaciones A y B, se hará una correlación cruzada entre ellas, tal como lo señala la ecuación (2.16). En general, se toman señales de ruido de una longitud de un día, y se correlacionan entre ellas.

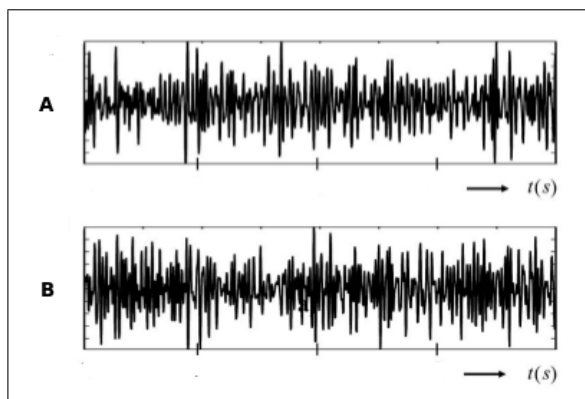


Figura 2.10: Señales de ruido ambiental

El resultado de la correlación cruzada entre las dos señales de ruido ambiental A y B, tal como se dijo en las secciones anteriores, es la Función de Correlación, la cual se hace para cada día. Al juntar en el tiempo las Funciones de Correlación de todos los días, se llega a un gráfico llamado Matriz de Correlación.

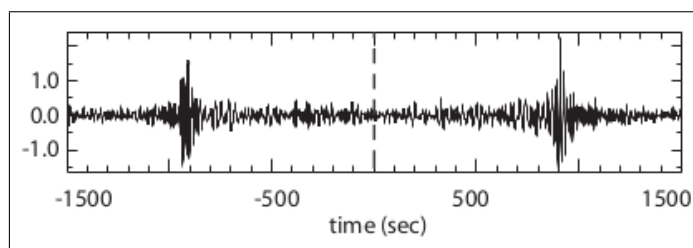


Figura 2.11: Ejemplo de Señal de Correlación para 1 día

La Figura 2.11 es un ejemplo de lo que en general da la Función de Correlación si hay fuentes llegando al par de estaciones de los dos lados, mas o menos a la misma distancia y con la misma intensidad (considerando que las heterogeneidades de los caminos recorridos eran similares). Nótese que ésta es la misma función de correlación mostrada para otro caso en la Figura 2.6 en la teoría para una dimensión. En este caso se escogieron a analizar 3000 [s] de las Funciones de Correlación, 1500 [s] para cada lado.

Ahora, una vez obtenida la Función de Correlación, se escoge una ventana de tiempo en la Coda de esta Función. Es decir, a partir de ahora se analiza la sección de ondas dispersivas luego de la primera llegada observada en la Función de Correlación. En la Figura 2.11 podría ser de potencial análisis para observar cambios de velocidades toda la señal que llegue después de los 900 [s] o -900 [s], ya que mas o menos a los 900 [s] arriban las primeras ondas (primeras llegadas). De esta manera, en la sección de la

Coda de la Función de Correlación se escoge el intervalo entre  $t - T$  y  $t + T$  mostrado en la ecuación (2.19) de  $R(t_s)$ . La razón por la cual se considera la Coda es la expuesta en párrafos anteriores, donde esta sección de la señal es altamente sensitiva a cambios del medio; es decir, si hubo un cambio en el medio, este cambio se percibirá en un cambio de los tiempos de llegada de las ondas que pertenecen a la Coda, ya que estas ondas han pasado varias veces por las heterogeneidades del medio, y por lo tanto, son altamente sensitivas a un cambio en ellas.

Ahora, para calcular  $R(t_s)$  entre la señal perturbada y la no perturbada, efectivamente se debe definir una función que represente el medio no perturbado  $u(t')$  y otra que represente el medio perturbado  $\tilde{u}(t')$ . Esta etapa funciona bastante bien siempre y cuando el estudio considere varios días a analizar, es decir, se genere una Matriz de Correlación de varios días. Esto se debe principalmente porque la idea es calcular el coeficiente  $R(t_s)$  para cada día comparando la señal de referencia  $u(t')$  con la señal correspondiente a ese día, que en este caso se considerará como la señal perturbada  $\tilde{u}(t')$ , y tratar de ajustar mediante iteraciones  $\tilde{u}(t')$  de tal manera de encontrar el mejor ajuste con  $u(t')$  que haga que  $R(t_s)$  sea máximo para ese día. Ese valor se va a encontrar en un determinado  $t_s = t_{max}$ , con lo cual hay asociado un cambio de velocidad  $\frac{\delta v}{v}$  (mediante la ecuación (2.55)) asociado a ese tiempo (por eso en la literatura se habla de  $\frac{\delta t}{T}$  como el "stretching factor", porque hay que alargar o comprimir una de las dos series para encontrar el mejor ajuste que haga que  $R(t_s)$  sea máximo). Así se obtienen finalmente las variaciones de velocidad buscadas.

En general, para definir la señal de referencia  $u(t')$ , se calcula el promedio de las señales de correlación cruzada de varios días. Por ejemplo, Wegler *et al.* (2006) en su estudio de Interferometría del terremoto de Niigata (6.6 [Mw]) de Japón, analizó datos continuos de 3 meses de datos (1.5 antes y 1.5 después del evento), y la señal de referencia la consideró como el promedio de las dos semanas de datos antes del terremoto. Wegler *et al.* (2009) en cambio calculó su traza de referencia como el promedio de los 4 meses totales de su estudio sobre el mismo terremoto, y luego comparó esta traza con las señales diarias, ajustándolas de tal manera de encontrar el coeficiente  $R(t_s)$  mas grande, y así encontrar las variaciones de velocidad diarias.

Lo anterior se ve ilustrado en la siguiente figura:

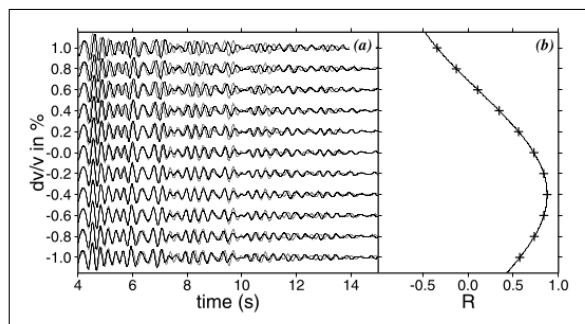


Figura 2.12: Determinación de cambios de velocidad (Wegler (2009))

Lo mostrado en la Figura 2.12 es para un día, donde la traza de la Coda de correlación cruzada diaria " $\tilde{u}(t')$ " (señal ploma) es comprimida o extendida cientos de veces dependiendo de la cantidad de iteraciones consideradas para ajustarse a la señal de referencia " $u(t')$ " (señal negra). En la figura sólo se muestran 11 diferentes ajustes, pero se puede ver que para un  $R(t_s) = 0,88$  que es el máximo que se puede obtener en este caso, la curva se ajusta de la mejor forma y se obtiene un cambio de velocidad de  $\frac{\delta v}{v} = -0,4\%$  en

este caso para el día considerado.

Luego, juntando estos resultados se pueden obtener cambios de velocidad en el tiempo durante el periodo que se desee en un estudio:

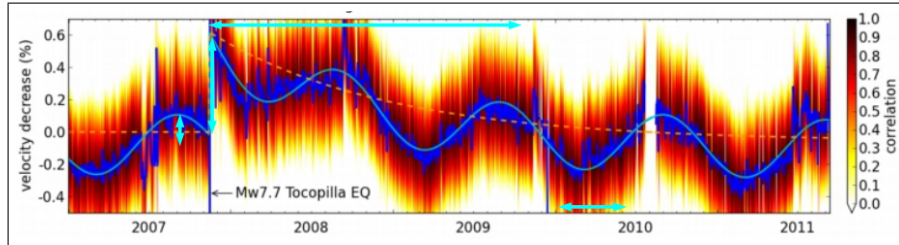


Figura 2.13: Cambios de velocidad usando red IPOC entre mediados de 2006 y 2011 (T. Richter (2013))

Así, de esta forma se aplica la teoría presentada en este trabajo, donde las ecuaciones que tienen gran relevancia para los resultados del estudio de cambios de velocidades en el tiempo, son:

$$R(t_s) = \frac{\int_{t-T}^{t+T} u(t')\tilde{u}(t'+t_s)dt'}{\sqrt{\int_{t-T}^{t+T} u^2(t')dt' \int_{t-T}^{t+T} \tilde{u}^2(t')dt'}} \quad \text{Ecuación (2.19)}$$

$$t_s = t_{max} = \frac{\sum_P \tau_P I_P}{\sum_P I_P} \quad \text{Ecc. (2.45), donde encuentra } t_s \text{ donde } R(t_s) \text{ es máximo}$$

$$\frac{\delta v}{v} = -\frac{\langle \tau \rangle}{t} \quad \text{Ecc. (2.55), donde se asocia un cambio de velocidad al } R(t_s)_{max} \text{ encontrado}$$

Esto resulta siempre y cuando se considere que éstas sean homogéneas espacialmente (asumiendo la suposición para pasar de la ecuación (2.52) a la (2.53). Si se considerara que las velocidades varían espacialmente, la teoría se vuelve un poco mas compleja, pero el resultado es la obtención de Tomografías Sísmicas, que son resultados de procesos mucho mas complicados, pero que permiten ver con gran claridad cómo varían las velocidades espacialmente en una zona determinada de estudio.

## Capítulo 3

# Apéndice

### 3.1. Obtención de la ecuación (2.29)

La ecuación (2.29) se puede demostrar de la siguiente manera:

Sea  $u = t_s - \tau_p$ , luego la ecuación (2.24) se transforma en:

$$C_P(u) = \int_{t-T}^{t+T} S_P(t') S_P(t' + u) dt' \quad (3.1)$$

Para pasar al dominio de la frecuencia se tiene que usar la Transformada de Fourier, la que se define, tanto para pasar del dominio del tiempo a la frecuencia y viceversa de la siguiente manera:

$$S_P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_P(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.2)$$

$$S_P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_P(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (3.3)$$

Luego, al aplicarle la Transformada de Fourier (3.2) a la ecuación (3.1), se obtiene:

$$\tilde{C}_P(\omega) = \int C_P(u) e^{i\omega u} du \quad (3.4)$$

Aplicando (3.3) a  $C_P(u)$  dentro de la ecuación (3.4), se tiene que aplicar (3.3) tanto para  $S_P(t')$  como para  $S_P(t' + u)$ . Luego, se obtendrá:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_P(\omega) &= \int \left[ \int \left( \int \tilde{S}_P(\omega') e^{-i\omega' t'} d\omega' \int \tilde{S}_P(\omega'') e^{-i\omega''(t'+u)} d\omega'' \right) dt' \right] e^{i\omega u} du \\ &= \int \left[ \iiint \tilde{S}_P(\omega') e^{-i\omega' t'} \tilde{S}_P(\omega'') e^{-i\omega''(t'+u)} d\omega'' d\omega' dt' \right] e^{i\omega u} du \\ &= \int \left[ \iiint \tilde{S}_P(\omega') \tilde{S}_P(\omega'') e^{-i(\omega'+\omega'')t'} e^{-i\omega''u} d\omega'' d\omega' dt' \right] e^{i\omega u} du \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se sabe que  $\int e^{-i(\omega'+\omega'')t'} dt' = \delta(\omega' + \omega'')$ . Luego, la ecuación (3.5) queda:

$$\tilde{C}_P(\omega) = \int \left[ \iint \tilde{S}_P(\omega') \tilde{S}_P(\omega'') \delta(\omega' + \omega'') e^{-i\omega''u} d\omega'' d\omega' \right] e^{i\omega u} du \quad (3.6)$$

Pero por propiedad de la Delta de Dirac,  $\int f(\omega'')\delta(\omega'' + \omega')d\omega'' = f(-\omega')$ , la ecuación (3.6) queda:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_P(\omega) &= \int \left[ \int \tilde{S}_P(\omega')\tilde{S}_P(-\omega')e^{i\omega'u}d\omega' \right] e^{i\omega u} du \\
&= \iint \tilde{S}_P(\omega')\tilde{S}_P(-\omega')e^{i\omega'u}e^{i\omega u}d\omega' du \quad \text{Pero: } \omega' = -\omega'' \\
&= \iint \tilde{S}_P(-\omega'')\tilde{S}_P(\omega'')e^{-i\omega''u}e^{i\omega u}d\omega'' du \\
&= \iint \tilde{S}_P(-\omega'')\tilde{S}_P(\omega'')e^{i(\omega-\omega'')u}d\omega'' du \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variable de  $\omega'$  a  $\omega''$ , se tendría que  $d\omega' = -d\omega''$ , pero se asumió que se invirtieron los intervalos de integración (que en este desarrollo por motivos de apariencia visual no están especificados), y así se conservó el signo. Además, se sabe que:  $\int e^{i(\omega-\omega'')u}du = \delta(\omega - \omega'')$ , así la ecuación (3.7) queda

$$\tilde{C}_P(\omega) = \int \tilde{S}_P(-\omega'')\tilde{S}_P(\omega'')\delta(\omega - \omega'')d\omega'' \tag{3.8}$$

Luego, aplicando la propiedad de la Delta de Dirac, que para este caso es:  $\int f(\omega'')\delta(\omega - \omega'')d\omega'' = f(\omega)$ , se obtiene:

$$\tilde{C}_P(\omega) = \tilde{S}_P(-\omega)\tilde{S}_P(\omega) \tag{3.9}$$

Pero  $\tilde{S}_P(-\omega)$  es el conjugado de  $\tilde{S}_P(\omega)$ , es decir:  $\tilde{S}_P(-\omega) = \tilde{S}_P^*(\omega)$ . Así, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_P(\omega) &= \tilde{S}_P^*(\omega)\tilde{S}_P(\omega) \\
\Rightarrow \tilde{C}_P(\omega) &= |\tilde{S}_P(\omega)|^2 \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Ya que el producto de un número complejo con su conjugado es el módulo de este número al cuadrado. De esta manera, la ecuación (3.10) es la demostración de la ecuación (2.29).



### 3.2. Definiendo la Función Densidad de Probabilidad para las perturbaciones del Tiempo de Viaje

Como se dijo en secciones anteriores, las perturbaciones de los tiempos de viaje de todas las ondas que llegan en una determinada ventana de tiempo tienen una distribución determinada. Para determinar esta distribución, se define la Energía Normalizada de las llegadas en la ventana de tiempo considerada con un cambio en los tiempos de viaje entre  $\tau$  y  $\tau + d\tau$ . De tal manera que la distribución de energía queda como:

$$P(\tau)d\tau = \frac{\sum_P (\text{Tal que } \tau < \tau_P < \tau + d\tau) I_P}{\sum_{\text{Todos los } P} I_P} \quad (3.11)$$

Es decir, la expresión (3.11) es hecha sobre los caminos que tienen un cambio en los tiempos de viaje entre  $\tau$  y  $\tau + d\tau$  dividido por la suma de todos los caminos posibles. Por lo tanto,  $P(\tau)$  está normalizada, y al escribirla como una Función Densidad de Probabilidad, tiene la forma de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\tau)d\tau = 1 \quad (3.12)$$

Luego, a partir de la ecuación (3.12) y usando las propiedades de la Función Densidad de Probabilidad, se puede escribir:

$$\langle f(\tau) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)P(\tau)d\tau \quad (3.13)$$

Reemplazando la ecuación (3.11) en (3.13), se obtiene:

$$\langle f(\tau) \rangle \equiv \frac{\sum_P f(\tau_P)I_P}{\sum_P I_P} \quad (3.14)$$

## Capítulo 4

# Bibliografía

Los papers usados para hacer este informe son:

- *Sens-Schönfelder C. & Wegler U., 2011. "Passive Image Interferometry for monitoring crustal changes with ambient seismic noise"*
- *Wapenaar K., Draganov D., Snieder R., Campman X. & Verdel A., 2010, "Tutorial on seismic Interferometry". Part 1: Basic principles and applications*
- *Heumann Tibor, 2008. "Apuntes sobre Función de Green"*
- *Snieder Roel, 2006. "The Theory of Coda Wave Interferometry"*
- *Wegler U., Nakahara H., Sens-Schönfelder C., Korn M. & Shiomi K, 2009. "Sudden drop of seismic velocity after the 2004 Mw 6.6 mid-Niigata earthquake, Japan, observed with Passive Image Interferometry"*
- *Wegler U. & Sens-Schönfelder C., 2006. "Fault zone monitoring with passive image interferometry"*