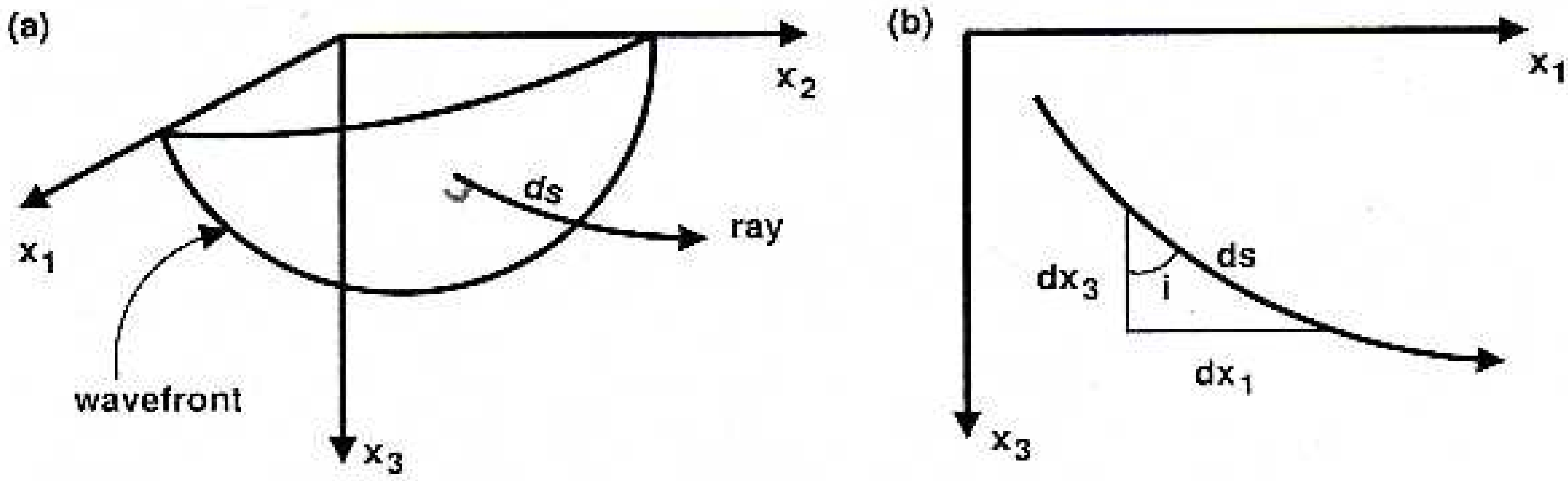
6 La teoría de rayos geométricos

- Usar rayos en sismología es una aproximación de alta frecuencia.
- Funciona bien para ondas propagándose en la corteza, manto, núcleo externo.
- Aún, para la estructura más interna de la Tierra, siempre es mejor usar modos normales.
- La ley de Snell describe la geometría del rayo.

$$\frac{\sin i}{c} = p = (\text{constante}) \tag{6.1}$$

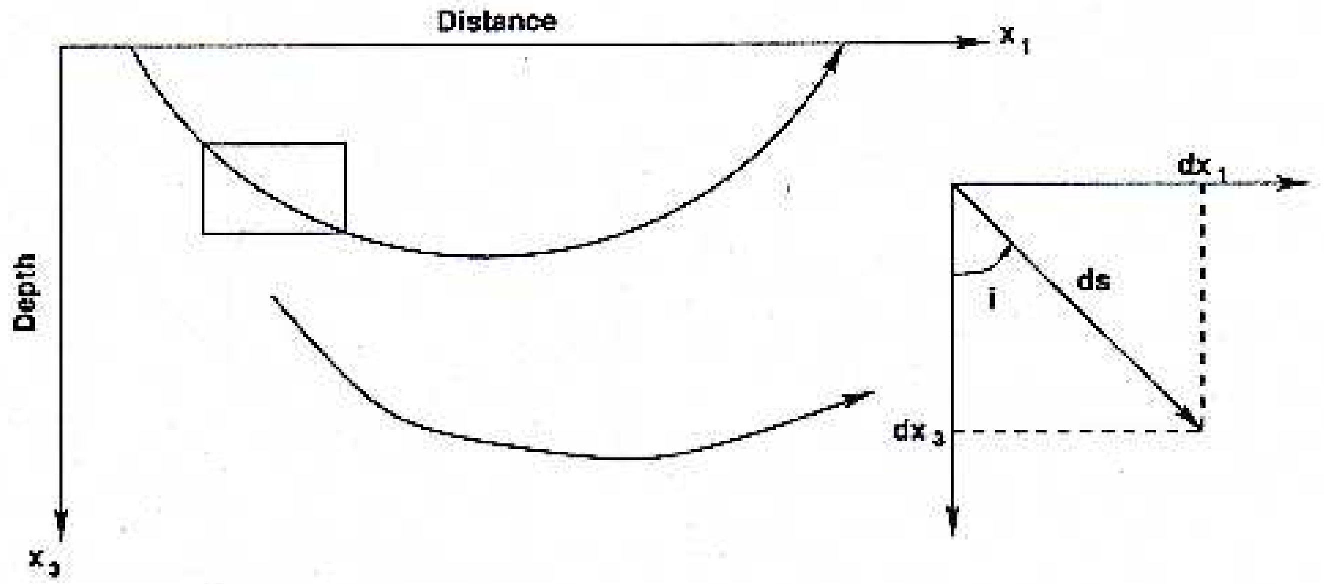
- El parámetro del rayo, p, también conocido como la lentitud horizontal, es constante para un rayo particular que sale de una fuente.

6.1 Geometría de rayos



- El frente de onda en un instante puede estar representado por $W(\boldsymbol{x})$.
- El rayo asociado con una cierta posición en este frente de onda puede estar representado por un elemento de línea con $\boldsymbol{ds} \propto \nabla W(\boldsymbol{x})$.
- Para simplicidad, siempre se puede reorientar los ejes del sistema de coordenadas para considerar el rayo propagándose en el plano $x_1 - x_3$.
- Para datos sísmicos, esto es equivalente de una rotación de los ejes horizontales de un sismómetro de norte, este al radial, transversal.

6.2 Tiempo de viaje



- Para simplicidad, consideremos una Tierra plana en esta clase.
- La modificación de esta teoría para una Tierra esférica es bastante simple, se puede ver el libro de Shearer para los detalles.
- Note que si la velocidad del medio aumenta con la profundidad, el rayo se dobla a una cierta profundidad y vuelve a la superficie (mas detalles vienen en una tarea).

6.2 Tiempo de viaje

- Cada elemento de línea del rayo, $\boldsymbol{ds} = (dx_1, dx_3)$, es un cierto ángulo i de la vertical.

$$\frac{dx_1}{ds} = \sin i \qquad \frac{dx_3}{ds} = \cos i = (1 - \sin^2 i)^{1/2} \tag{6.2}$$

- Recuerde la ley de Snell, $\sin i = pc = p/u$, con p un constante para el rayo y u la lentitud del medio que es el inverso de su velocidad $(u = 1/c)$; entonces:

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{p}{u} \qquad \frac{dx_3}{ds} = u^{-1}(u^2 - p^2)^{1/2} \tag{6.3}$$

- Podemos combinar estas expresiones en una ecuación que describe la geometría del rayo:

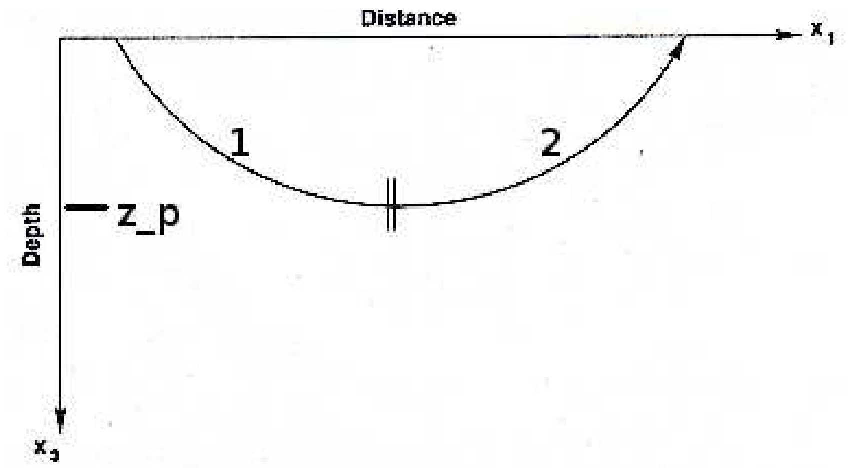
$$\frac{dx_1}{dx_3} = \frac{p}{(u^2 - p^2)^{1/2}} \tag{6.4}$$

6.2 Tiempo de viaje

- Para un modelo de velocidades terrestre que solamente varía con la profundidad, es decir $u = u(x_3)$, podemos encontrar la distancia que viaja un cierto rayo en términos de su parámetro del rayo y la estructura de velocidad.

$$X(p) = 2p \int_0^{z_p} \frac{dx_3}{(u^2(x_3) - p^2)^{1/2}} \tag{6.5}$$

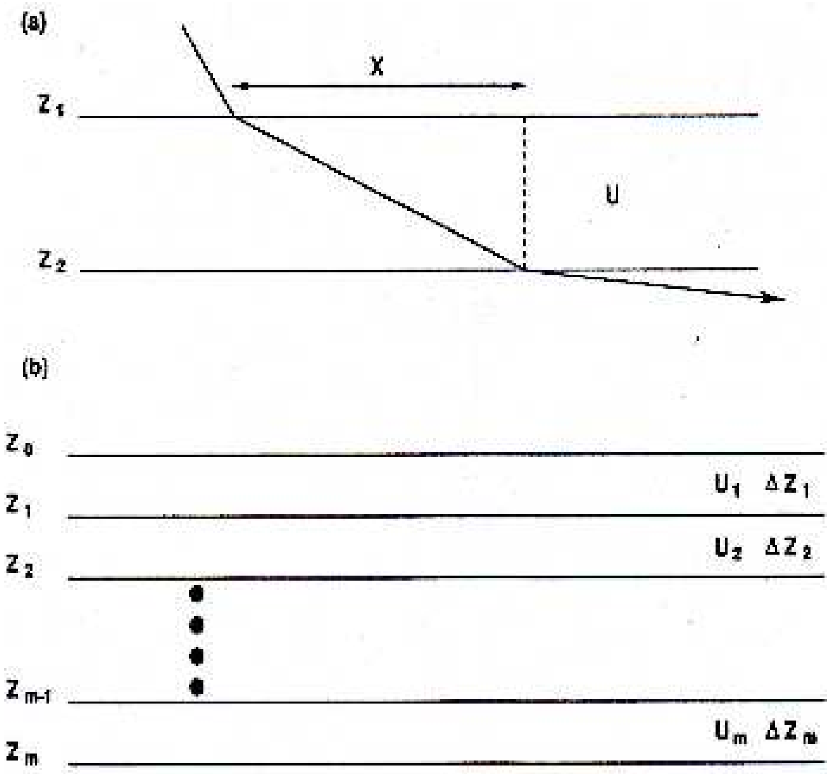
- En esta expresión, z_p es la profundidad del punto de doblamiento del rayo, y se puede apreciar que el factor de 2 existe porque el rayo viaja hacia abajo (hasta este punto de doblamiento), y después hacia arriba en una forma simétrica.



6.2 Tiempo de viaje

- Podemos cambiar de un modelo de velocidades continuo a una secuencia de capas horizontales:

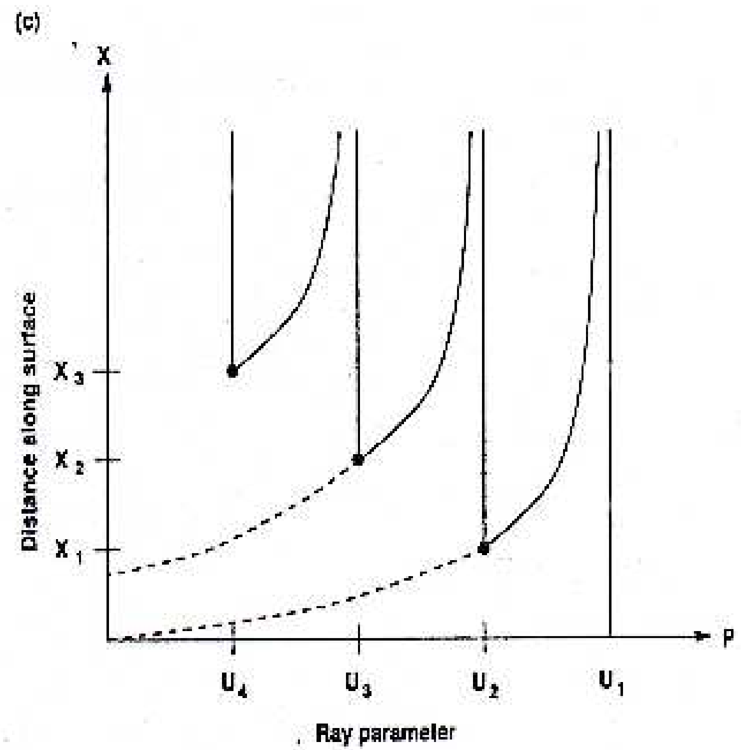
$$\left[\int_{z_1}^{z_2} dx_3 = \Delta z_2\right]$$



6.2 Tiempo de viaje

- Para esta secuencia de capas horizontales, la lentitud u es constante dentro de una cierta capa, y el rayo viaja en todas las capas que cumplan la relación $u_i > p$. Se puede escribir la ecuación (6.5) en una forma discreta:

$$X(p) = \frac{2p\Delta z_1}{(u_1^2 - p^2)^{1/2}} + \frac{2p\Delta z_2}{(u_2^2 - p^2)^{1/2}} + \ldots + \frac{2p\Delta z_3}{(u_3^2 - p^2)^{1/2}} = 2p\sum_i \frac{\Delta z_i}{(u_i^2 - p^2)^{1/2}} \quad (6.6)$$



6.2 Tiempo de viaje

- Para convertir entre distancia y tiempo podemos usar la relación $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} = u$.
- Y entonces:

$$\frac{dt}{dx_3} = \frac{dt}{ds}\frac{ds}{dx_3} = \frac{u^2}{(u^2 - p^2)^{1/2}}$$

- En la misma manera que antes:

$$T(p) = 2\int_0^{z_p} \frac{u^2(x_3)dx_3}{(u^2(x_3) - p^2)^{1/2}} \tag{6.8}$$

- Y para una secuencia de capas, para $u_i > p$:

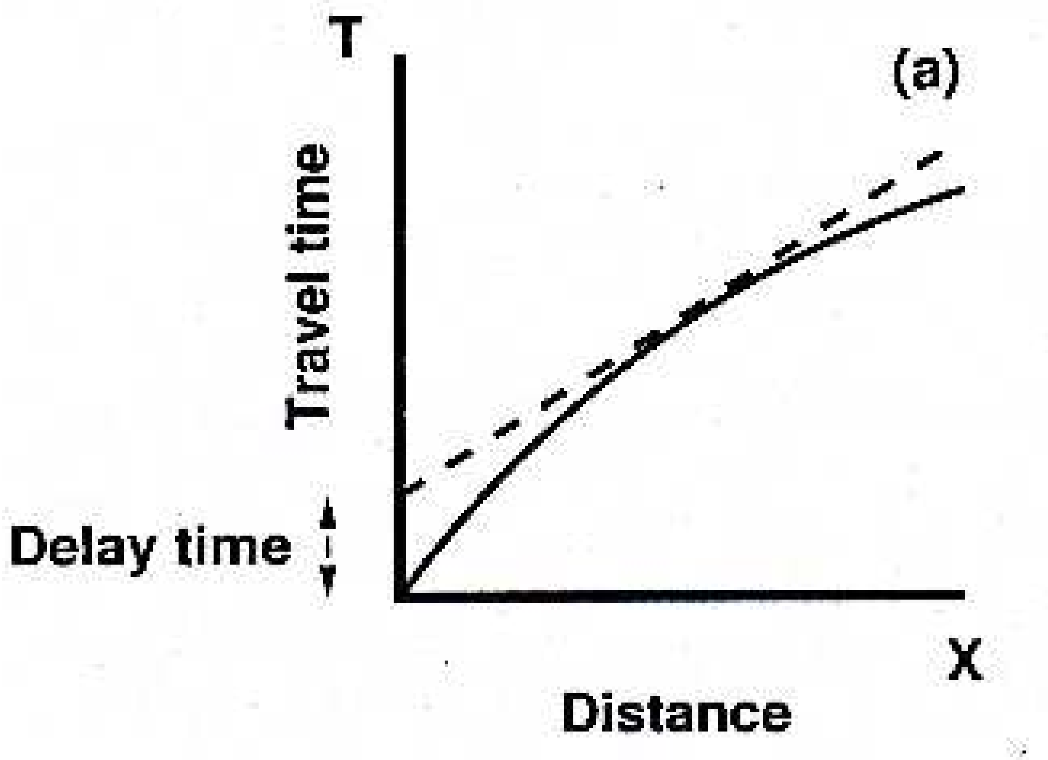
$$T(p) = 2\sum_i \frac{u_i^2 \Delta z_i}{(u_i^2 - p^2)^{1/2}} \tag{6.9}$$

6.2 Tiempo de viaje

- Podemos reescribir la ecuación (6.8) en la siguiente manera:

$$T(p) = 2\int_0^{z_p} \left\{ \frac{p^2}{(u^2(x_3) - p^2)^{1/2}} + (u^2(x_3) - p^2)^{1/2} \right\} dx_3 = pX + 2\int_0^{z_p} \eta(x_3) dx_3 \qquad (6.10)$$

- $\eta(x_3) = (u^2(x_3) - p^2)^{1/2}$ es la lentitud vertical.



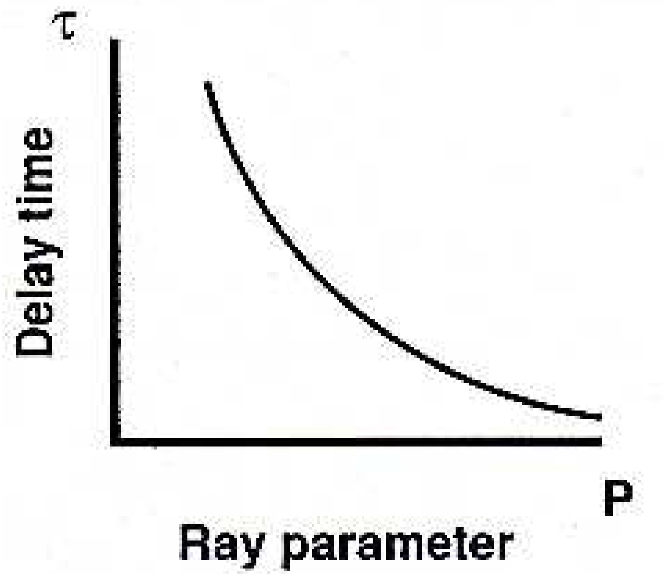
6.3 Curvas tau-p

- Podemos definir un tiempo de retraso:

$$\tau(p) = 2\int_0^{z_p} (u^2(x_3) - p^2)^{1/2} dx_3 = 2\int_0^{z_p} \eta(x_3) dx_3 \qquad (6.11)$$

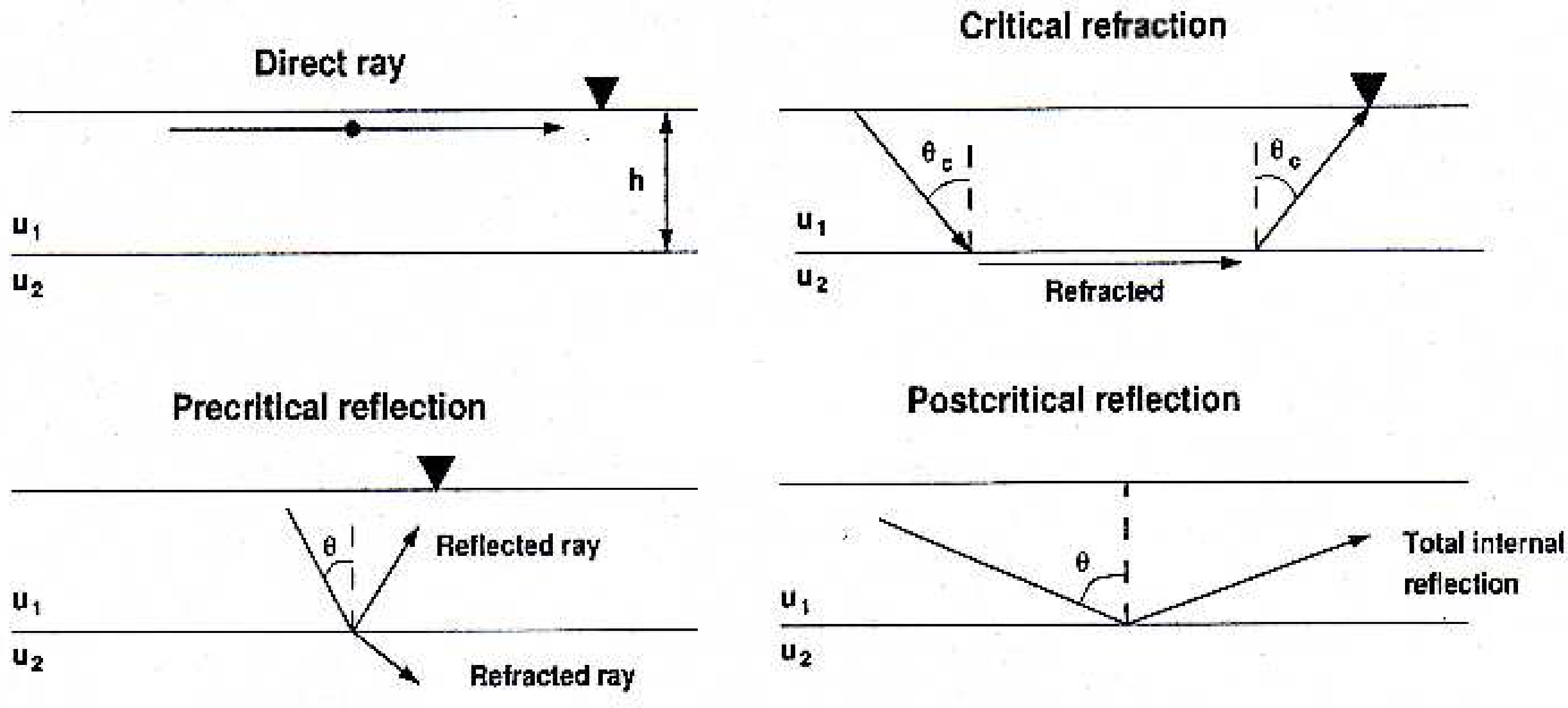
- Tomando la derivada del tiempo de retraso con respecto al p nos da un valor siempre negativo, dado que $X(p)$ es positivo:

$$\frac{d\tau}{dp} = 2\frac{d}{dp}\int_0^{z_p} (u^2 - p^2)^{1/2} dx_3 = -2p\int_0^{z_p} \frac{dx_3}{(u^2 - p^2)^{1/2}} = -X(p) \qquad (6.13)$$



6.4 Rayos en una capa homogénea

- El caso simple de una capa homogénea sobre un semi-espacio:



- Tenemos un rayo directo, una refracción crítica*, una reflexión pre-crítica y una reflexión post-crítica.

*¿Qué esta pasando actualmente con esta refracción crítica? ¿Por qué vuelve a la superficie?

6.4 Rayos en una capa homogénea