2.3 Velocidad de fase y grupo

- La velocidad c en las secciones anteriores es la velocidad de fase de las ondas superficiales ($c = \omega/k$). Es la velocidad con que una fase se propaga.
- En general, las velocidades α y β del medio aumentan con la profundidad dentro del manto de la Tierra.
- Entonces, c disminuye cuando aumenta la frecuencia de las ondas superficiales. Las ondas están dispersivas.
- La energía de una onda dispersiva se propaga con la velocidad del grupo, $u = d\omega/dk$. u y c están diferentes para las ondas de superficie.

2.3.1 Una demostración simple

- ¿Cuál es la suma de dos ondas armónicas con ω y k ligeramente diferente entre ellos?
- Vamos a usar $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$

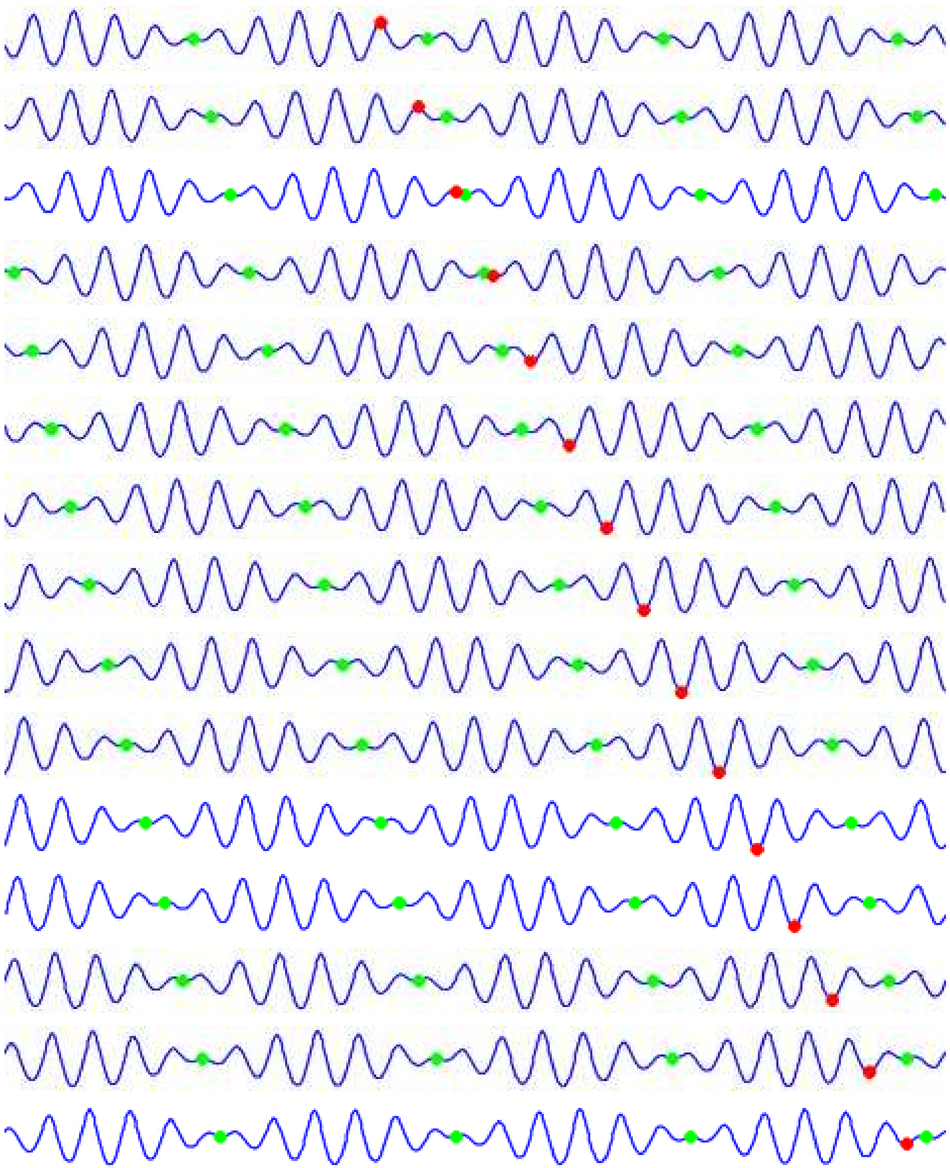
$$u(x,t)=\cos(\omega_1 t-k_1 x)+cos(\omega_2 t-k_2 x)$$

$$\begin{array}{lclcl}\omega_1=\omega+\delta\omega & , & \omega_2=\omega-\delta\omega & , & \omega>>\delta\omega \\ k_1=k+\delta k & , & k_2=k-\delta k & , & k>>\delta k\end{array}$$

$$\begin{aligned}\therefore u(x,t) &= \cos(\omega t+\delta\omega t-kx-\delta kx)+cos(\omega t-\delta\omega t-kx+\delta kx)\\ &= 2\cos(\omega t-kx)\cos(\delta\omega t-\delta kx)\end{aligned}$$

- El envolvente tiene velocidad $u=\delta\omega/\delta k$, la velocidad del grupo.
- Cimas individuales tienen velocidades $c=\omega/k$, la velocidad de fase.

2.3.1 Una demostración simple



2.3.2 Relación entre *u* y *c*

- La relación entre u y c puede estar escrito como:

$$
\begin{aligned}
u = \frac{d\omega}{dk} &= \frac{d}{dk}(ck) \\
&= c + k\frac{dc}{dk} \\
&= c\left(1 + \frac{k}{c}\frac{dc}{dk}\right) \\
&= \frac{c}{\left(1 - k\frac{dc}{d\omega}\right)}\underbrace{\left[\left(1 + \frac{k}{c}\frac{dc}{dk}\right)\left(1 - k\frac{dc}{d\omega}\right)\right]}_{1} \\
&= \frac{c}{\left(1 - k\frac{dc}{d\omega}\right)}
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

- Entonces la manera de la dispersión de las ondas de superficie determina su forma física.

Intermezzo

Para demostrar que

$$A = \left(1 + \frac{k}{c}\frac{dc}{dk}\right)\left(1 - k\frac{dc}{dw}\right) = 1$$

usaremos la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
c &= \frac{\omega}{k} \\
\frac{dc}{d\omega} &= \frac{1}{k} - \frac{\omega}{k^2}\frac{dk}{d\omega} \\
\frac{dc}{dk} &= \frac{dc}{d\omega}\frac{d\omega}{dk} = -\frac{\omega}{k^2} + \frac{1}{k}\frac{d\omega}{dk}
\end{aligned}$$

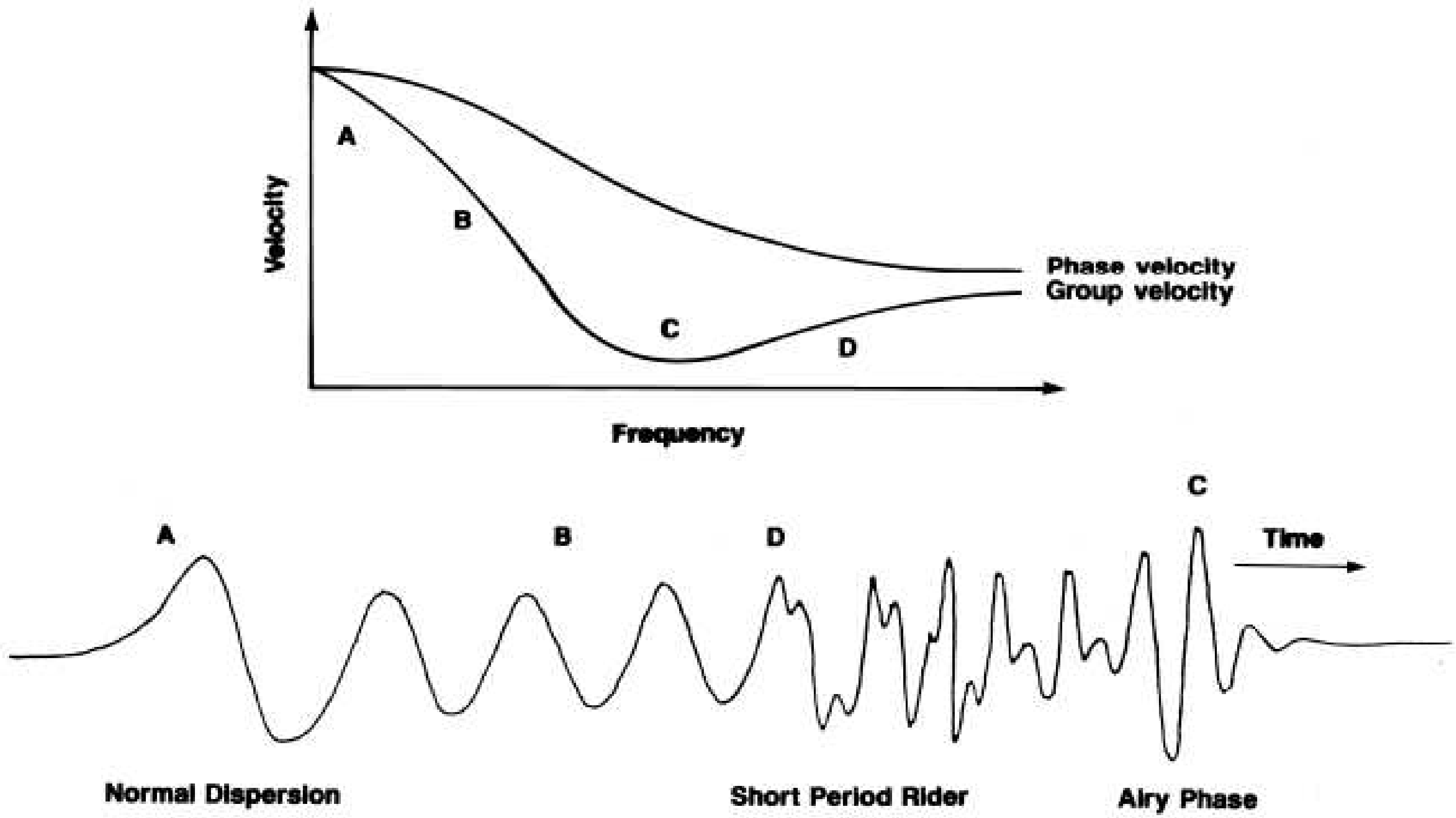
Luego

$$\begin{aligned}
A &= \left(1 + \frac{k}{c}\frac{dc}{dk}\right)\left(1 - k\frac{dc}{dw}\right) \\
&= 1 + \frac{k}{c}\frac{dc}{dk} - k\frac{dc}{d\omega} - \frac{k^2}{c}\frac{dc}{dk}\frac{dc}{d\omega} \\
&= 1 + \frac{k}{c}\left(-\frac{\omega}{k^2} + \frac{1}{k}\frac{d\omega}{dk}\right) - k\left(\frac{1}{k} - \frac{\omega}{k^2}\frac{dk}{d\omega}\right) - \frac{k^2}{c}\left(-\frac{\omega}{k^2} + \frac{1}{k}\frac{d\omega}{dk}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{\omega}{k^2}\frac{dk}{d\omega}\right) \\
&= 1 - \frac{\omega}{kc} + \frac{1}{c}\frac{d\omega}{dk} - 1 + \frac{\omega}{k}\frac{dk}{d\omega} - \frac{k^2}{c}\left(-\frac{\omega}{k^3} + \frac{1}{k^2}\frac{d\omega}{dk} + \frac{\omega^2}{k^4}\frac{dk}{d\omega} - \frac{\omega}{k^3}\right) \\
&= -\frac{\omega}{kc} + \frac{1}{c}\frac{d\omega}{dk} + \frac{\omega}{k}\frac{dk}{d\omega} + \frac{\omega}{kc} - \frac{1}{c}\frac{d\omega}{dk} - \frac{\omega^2}{ck^2}\frac{dk}{d\omega} + \frac{\omega}{kc} \\
&= \frac{\omega}{k}\frac{dk}{d\omega} - \frac{\omega^2}{ck^2}\frac{dk}{d\omega} + \frac{\omega}{kc}
\end{aligned}$$

Recordando que $c = \frac{\omega}{k}$ escribimos

$$\begin{aligned}
A &= c\frac{dk}{d\omega} - c\frac{dk}{d\omega} + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.3.3 Dispersión en un sismograma



La forma de una onda de superficie en un sismograma contiene inicialmente bajas frecuencias, después una mezcla de bajas y altas frecuencias, y al final la fase de Airy. (Por supuesto, siempre es mas complicado que este ejemplo simplificado).

2.3.4 Fase de Airy

Modal Summation

Kennett, Seismic Wave Propagation in Stratified Media

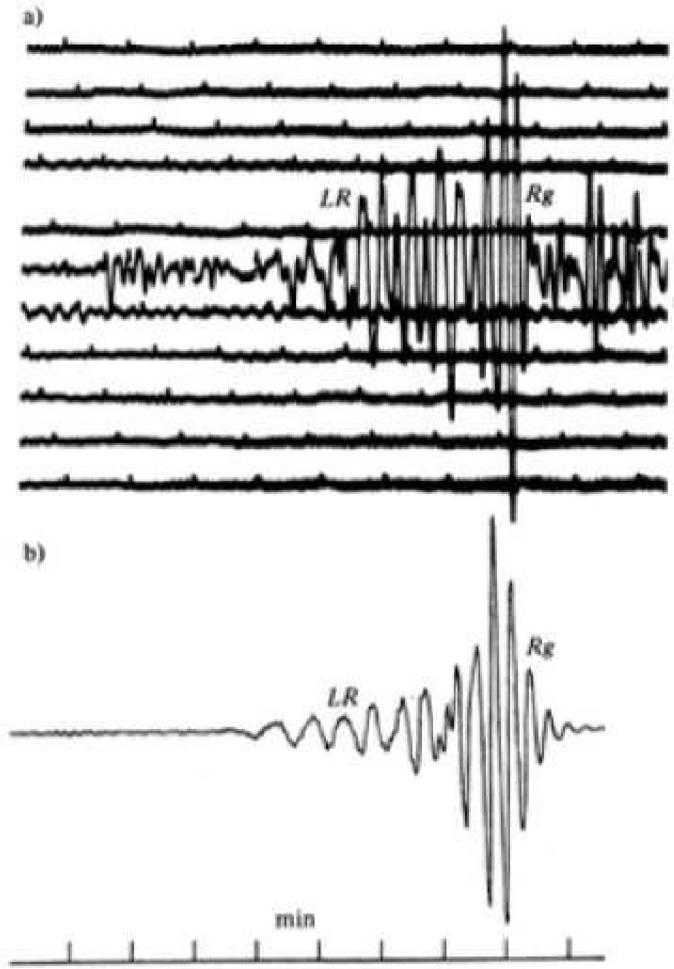
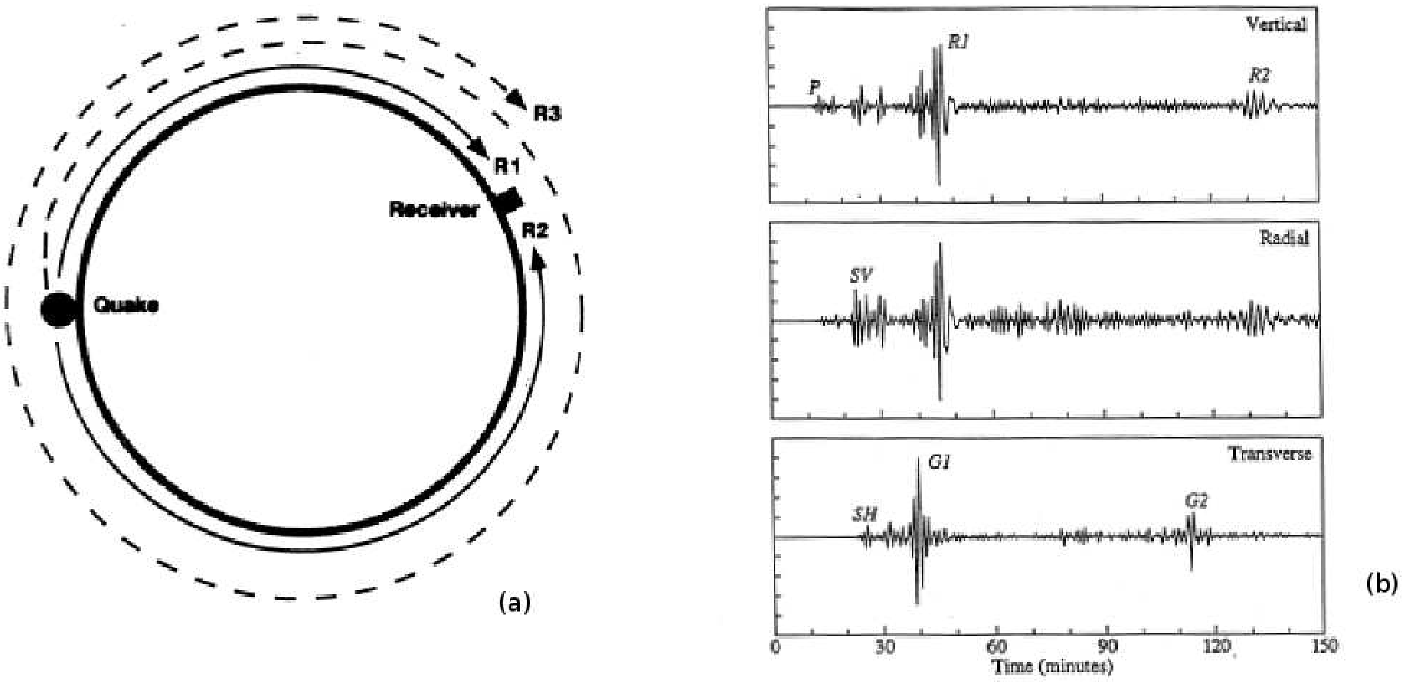


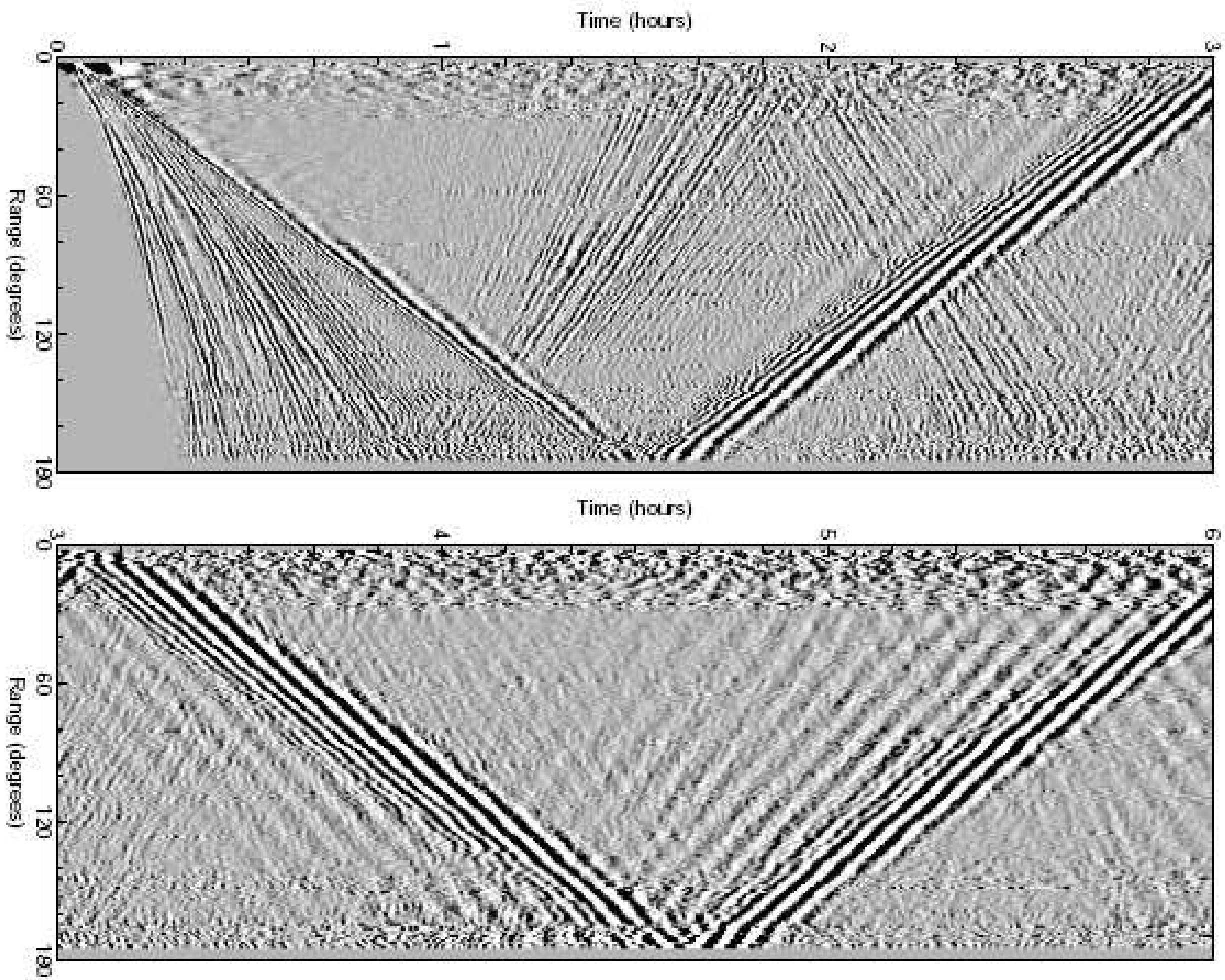
Figure 11.9. Observed and theoretical seismograms for Airy phases: a) *Rg* and long-period Rayleigh waves *LR* at 3000 km; b) modal sum to 0.25 Hz at 3000 km, higher modes ride on the long-period fundamental Rayleigh mode.

2.4 Tierra esférica, ondas de superficie



Las ondas de superficie pueden recorrer la circunferencia de la Tierra varias veces. Cada vez que pasan a un instrumento muestran mayor dispersión y tienen menor amplitud.

2.4 Tierra esférica, ondas de superficie



La figura muestra muchos sismogramas (6 horas de datos, componente vertical) amontonados, por estaciones entre cero y 180 grados de distancia desde la fuente. Se puede claramente notar R1, R2, R3 y R4, entre otras fases.

2.5 Oscilaciones libres de la Tierra

- Cuando la longitud de onda esta comparable con el tamaño de la Tierra, se deben usar modos normales en vez de la teoría de rayos.
- Para una Tierra esférica, homogénea, isotrópica y elástica, podemos escribir el desplazamiento como:

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{\Psi} = \nabla\Phi + \nabla \times \nabla \times \mathbf{Sr} + \nabla \times \mathbf{Tr} \tag{2.26}$$

- Y la ecuación de movimiento es:

$$\alpha^2\nabla(\nabla\mathbf{u}) - \beta^2\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \ddot{\mathbf{u}} \tag{2.27}$$

- Las soluciones para Φ, $\mathbf{Sr}$ y $\mathbf{Tr}$ tienen la forma:

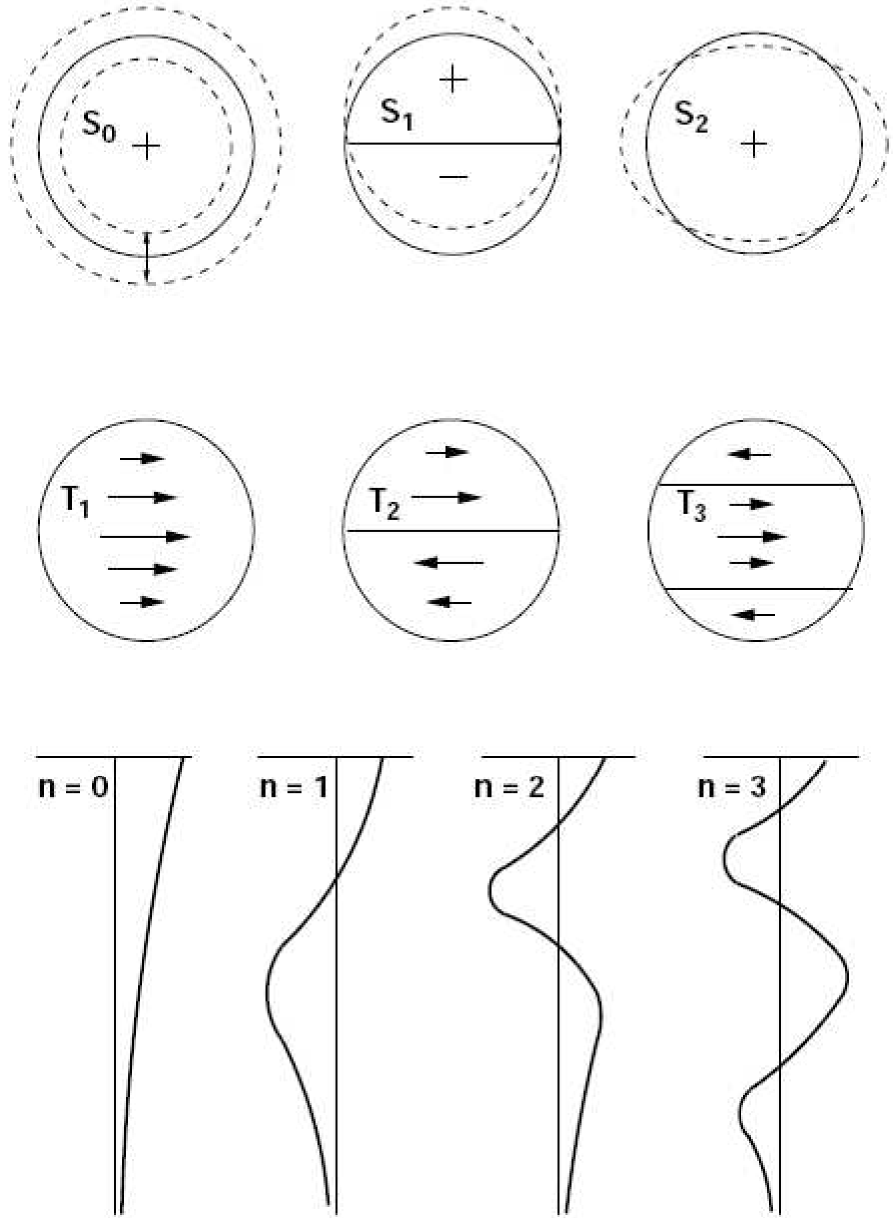
$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} j_l(k_\alpha r) \sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta, \phi) \tag{2.28}$$

- $Y_l^m(\theta, \phi) = P_l^m(\cos\theta)e^{\pm im\phi}$ son las funciones armónicas esféricas y $j_l(k_\alpha r)$ son funciones esféricas de Bessel.

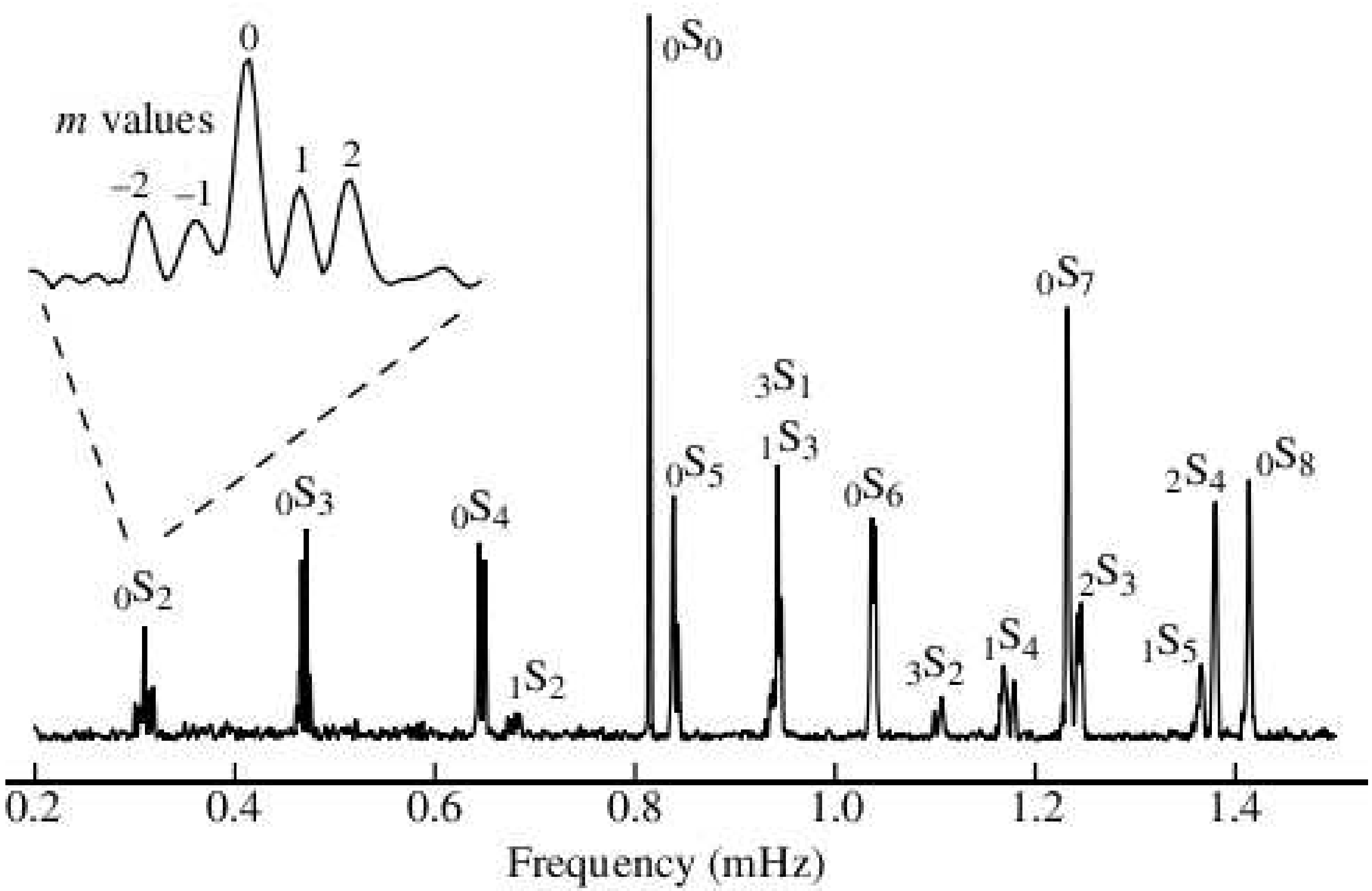
2.5 Oscilaciones libres de la Tierra

- La solución puede estar escrito en términos de modos esferoidales ${}_nS_l^m$ (asociados con los potenciales de las ondas P y SV - Φ y $\mathbf{Sr}$), y modos toroidales ${}_nT_l^m$ (asociados con el potencial de la onda SH - $\mathbf{Tr}$).
- n es el número de nodos del desplazamiento radial.
- l determina la distribución de desplazamiento con la colatitud.
- Existen $2m$ nodos en $360°$ de longitud.
- Algunos ejemplos de modos se muestran en la próxima diapositiva.
- Estos modos significan que la Tierra vibra como una campana después de grandes terremotos. Las frecuencias resonantes dan pistas sobre las propiedades elásticas de las diferentes capas de la Tierra.

2.5 Oscilaciones libres de la Tierra



2.5 Oscilaciones libres de la Tierra



El espectro de la componente radial, con los modos esferoidales visible, de 240 horas de datos del terremoto de 2004 Sumatra-Andaman (Mw=9.1), registrado en la estación ARU (en Rusia).

2.6 Rayos y modos: correspondencia

- Un rayo puede estar representado por una suma sobre los modos.
- La aproximación de rayos asume que el rayo no es sensible a la estructura bajo del punto del doblamiento del rayo. Actualmente esta profundidad representa la profundidad en que la solución usando modos cambia a decaimiento exponencial; entonces la onda es influenciada por esta estructura de la Tierra debajo de ella.