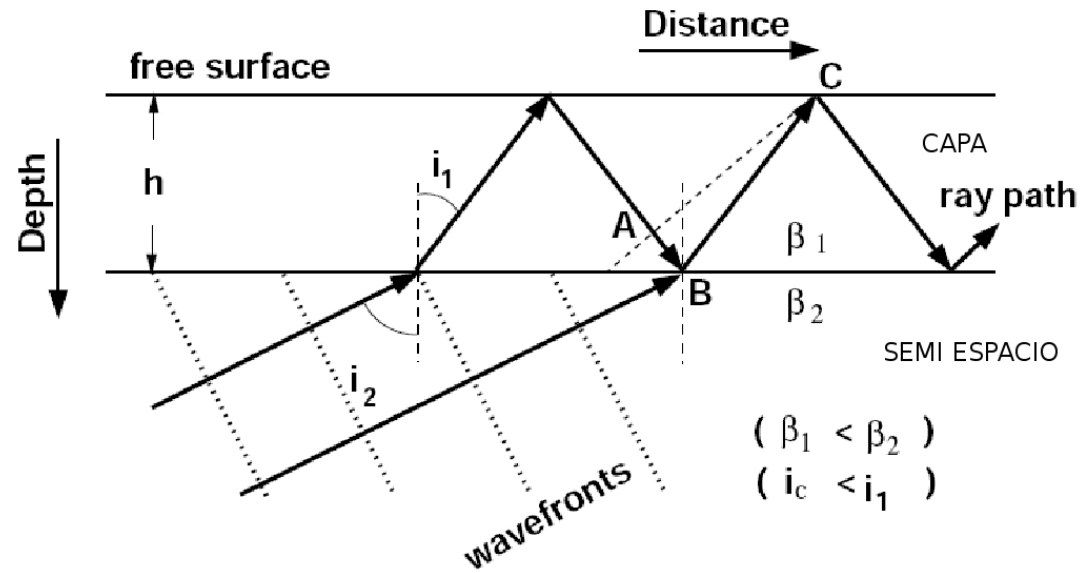




## 2.2 Ondas Love: formulación



- A diferencia de ondas Rayleigh (que tienen desplazamiento P-SV acopladas), las ondas Love contienen solamente movimiento “estilo SH”.
- Las ondas Love no pueden existir en un semi espacio uniforme, requieren una estructura de velocidad que varía con la profundidad.
- El caso mas simple en que podemos analizar cuantitativamente la propagación de ondas Love en un medio es el caso de una capa horizontal (densidad  $\rho_1$ , velocidad de onda de cizalle  $\beta_1$ ) encima de un semi espacio ( $\rho_2, \beta_2$ ).



## 2.2 Ondas Love: formulación

En la capa (denominado por el símbolo ①), viaja una onda SH hacia arriba y abajo:

$$u_2^{①}(x_1, x_3, t) = B_1 e^{i(k_1 x_1 + k_1 r_{\beta_1} x_3 - \omega t)} + B_1' e^{i(k_1 x_1 - k_1 r_{\beta_1} x_3 - \omega t)} \quad (2.15)$$

En el semi espacio (②), suponemos que existe una onda que se propaga horizontalmente:

$$u_2^{②} = f(x_3) e^{i(k_1 x_1 - \omega t)}$$

Para que la expresión para  $u_2$  satisfice la ecuación de movimiento:

$$f(x_3) = \text{cte.} e^{\pm i k_1 r_{\beta_2} x_3}$$

En la misma manera que antes, hay que elegir el signo positivo de eso para cumplir con la conservación de energía, entonces:

$$u_2^{②}(x_1, x_3, t) = B_2 e^{i(k_1 x_1 + k_1 r_{\beta_2} x_3 - \omega t)} \quad (2.16)$$



## 2.2 Ondas Love: formulación

Noten que  $k_1$  es el mismo para los dos medios. Eso es una consecuencia de la ley de Snell (mostraremos eso en otra clase - sorry). También, noten que

$$r_{\beta_1} = \frac{k_3^{\textcircled{1}}}{k_1} = \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1} \quad ; \quad r_{\beta_2} = \frac{k_3^{\textcircled{2}}}{k_1} = \sqrt{\frac{c^2}{\beta_2^2} - 1}$$

Con  $c$  la velocidad de la onda que viaja horizontalmente, si esta onda existe. Consideremos el caso cuando  $c < \beta_2$ , y veremos si existe una onda con esta condición que cumpla las condiciones de borde en ambos la superficie y la interfase. Si existe una solución con  $c < \beta_2$ , tendrá  $r_{\beta_2}$  imaginaria,

$$r_{\beta_2} = \left( \frac{c^2}{\beta_2^2} - 1 \right)^{1/2} = i \left( 1 - \frac{c^2}{\beta_2^2} \right)^{1/2} = i|r_{\beta_2}| \quad (2.17)$$

y entonces existirá una onda evanescente en el semi espacio.



## 2.2.1 Condiciones de borde

● En la superficie libre ( $x_3 = 0$ ) la tracción esta cero:

$$\begin{aligned}\sigma_{23}|_{x_3=0} &= 0 \\ \mu_1 \left. \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_3} \right|_{x_3=0} &= 0 \\ \mu_1 (ik_1 r_{\beta_1})(B_1 - B'_1)e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} &= 0\end{aligned}\tag{2.18}$$

$$\therefore B_1 = B'_1$$

En palabras, tenemos una reflexión interna total en la superficie. Esto no es una gran sorpresa.



## 2.2.1 Condiciones de borde

- En la interfase ( $x_3 = h$ ) hay continuidad de tracción y de desplazamiento:

Continuidad de desplazamiento:

$$\begin{aligned} u_2^{(1)} \Big|_{x_3=h} &= u_2^{(2)} \Big|_{x_3=h} \\ B_1 \left[ e^{ik_1 r_{\beta_1} h} + e^{-ik_1 r_{\beta_1} h} \right] e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} &= B_2 e^{ik_1 r_{\beta_2} h} e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ 2B_1 \cos(k_1 r_{\beta_1} h) &= B_2 e^{ik_1 r_{\beta_2} h} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Continuidad de tracción:

$$\begin{aligned} \mu_1 \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h} &= \mu_2 \frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h} \\ \mu_1 (ik_1 r_{\beta_1}) B_1 \left[ e^{ik_1 r_{\beta_1} h} - e^{-ik_1 r_{\beta_1} h} \right] &= \mu_2 (ik_1 r_{\beta_2}) B_2 e^{ik_1 r_{\beta_2} h} \\ 2i\mu_1 r_{\beta_1} B_1 \sin(k_1 r_{\beta_1} h) &= \mu_2 r_{\beta_2} B_2 e^{ik_1 r_{\beta_2} h} \end{aligned} \quad (2.22)$$



## 2.2.1 Condiciones de borde

Las condiciones de borde tienen que estar cumplidas simultáneamente, entonces podemos encontrar la condición para que existe una onda Love:

$$\begin{aligned} \frac{(2.22)}{(2.21)} &\Rightarrow \frac{2i\mu_1 r_{\beta_1} B_1 \sin(k_1 r_{\beta_1} h)}{2B_1 \cos(k_1 r_{\beta_1} h)} = \frac{\mu_2 r_{\beta_2} B_2 e^{ik_1 r_{\beta_2} h}}{B_2 e^{ik_1 r_{\beta_2} h}} \\ \tan(k_1 r_{\beta_1} h) &= \frac{\mu_2 r_{\beta_2}}{i\mu_1 r_{\beta_1}} = \frac{-i\mu_2 r_{\beta_2}}{\mu_1 r_{\beta_1}} \\ \tan(k_1 r_{\beta_1} h) &= \frac{\mu_2 |r_{\beta_2}|}{\mu_1 r_{\beta_1}} \equiv \frac{\mu_2 \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1 \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

La ecuación (2.23) es la condición para que  $c < \beta_2$ , y entonces existe una onda Love. Noten que cuando  $c < \beta_2$ ,  $r_{\beta_2}$  es imaginaria ( $r_{\beta_2} = i|r_{\beta_2}|$ ), y entonces:

$$u_2^{\textcircled{2}} = B_2 e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} e^{-k_1 r_{\beta_2} x_3}$$



## 2.2.2 La solución

Si tomamos la ecuación (2.23), hagamos la sustitución para  $k_1 = \omega/c$ , y definimos una variable  $\xi$ :

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1} \\ \Rightarrow \frac{h^2}{c^2} &= \frac{h^2}{\beta_1^2} - \xi^2\end{aligned}$$

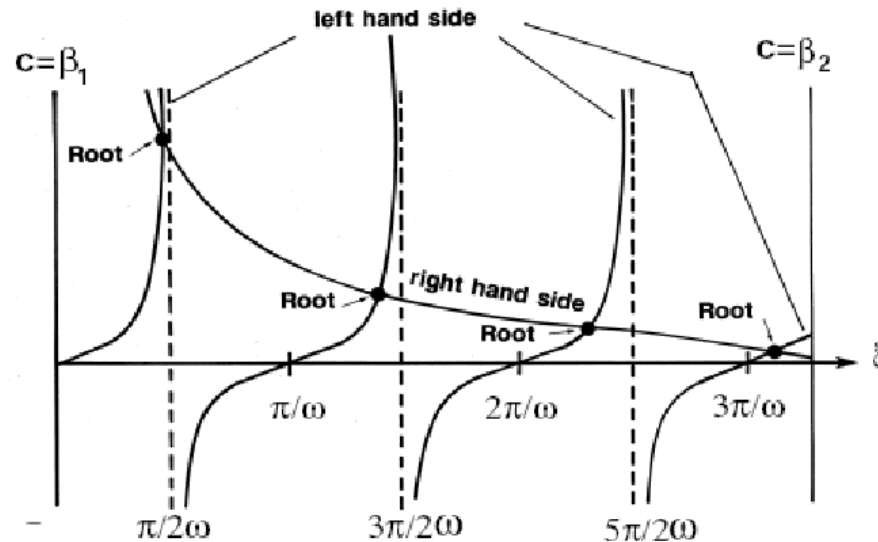
llegamos al

$$\begin{aligned}\tan \left[ \frac{\omega h}{c} \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1} \right] &= \frac{\mu_2 \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1 \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}} \\ \tan(\omega \xi) &= \frac{\mu_2 \frac{h}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1 \frac{h}{c} \sqrt{\frac{c^2}{\beta_1^2} - 1}} \\ \tan(\omega \xi) &= \frac{\mu_2 \sqrt{\frac{h^2}{c^2} - \frac{h^2}{\beta_2^2}}}{\mu_1 \xi} \\ \tan(\omega \xi) &= \frac{\mu_2 \sqrt{h^2 \left( \frac{1}{\beta_1^2} - \frac{1}{\beta_2^2} \right) - \xi^2}}{\mu_1 \xi}\end{aligned}$$



## 2.2.2 La solución

Podemos encontrar la solución a la previa ecuación gráficamente:

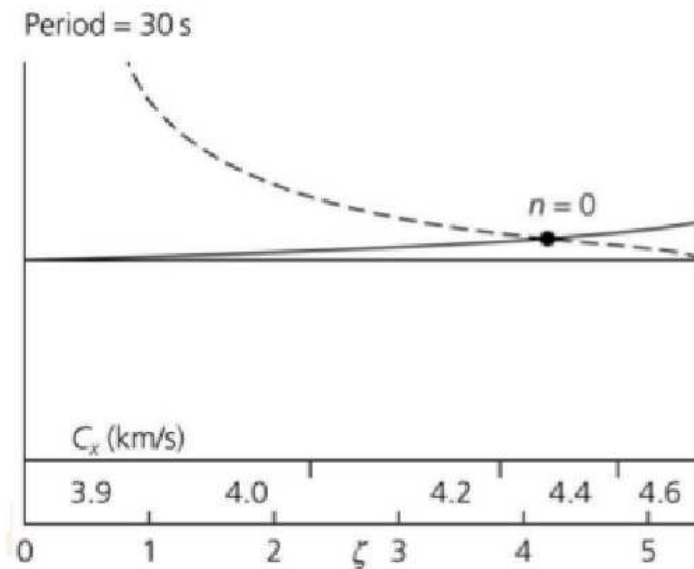
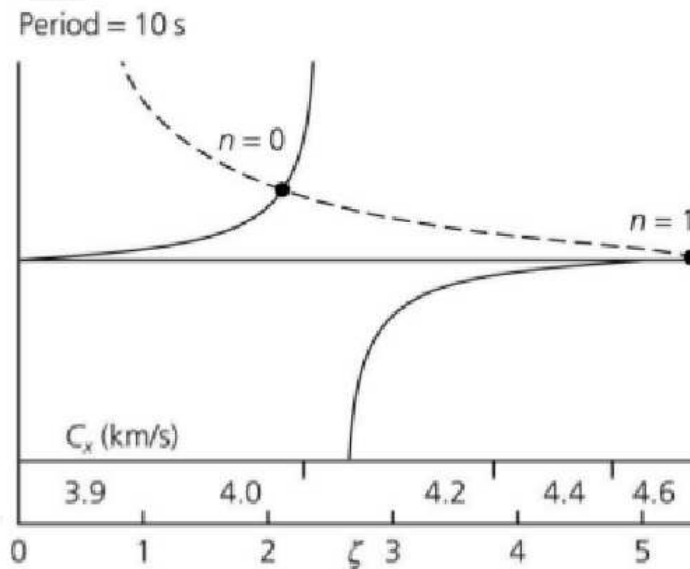
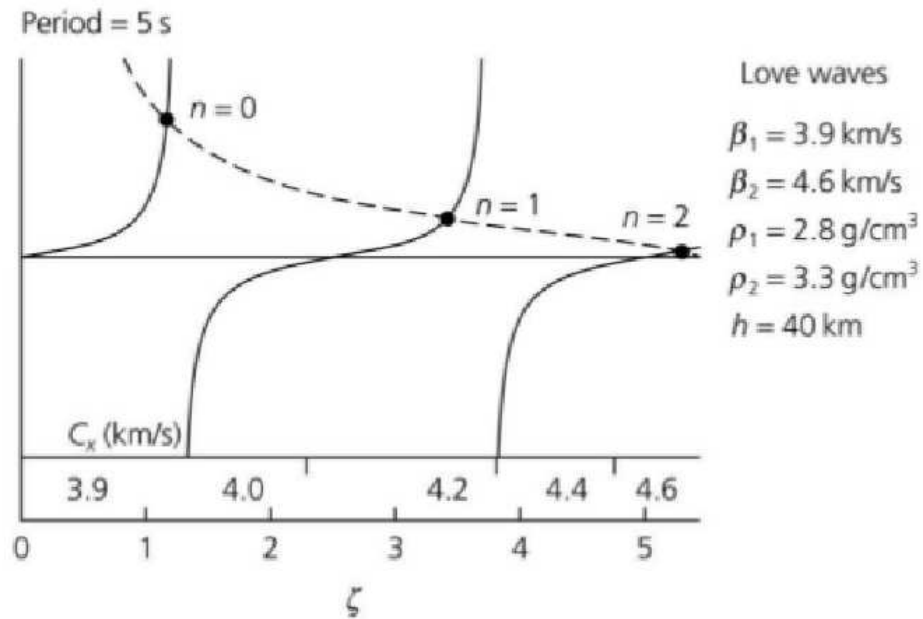


- Graficamos las dos funciones de la ecuación anterior, dónde las dos curvas se cruzan, tenemos un valor para  $\xi$ , y entonces para  $c$ , que cumpla las condiciones de borde.
- Una cantidad finita de soluciones para  $c$  existen, que depende de  $\omega$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  y  $h$ .
- Las soluciones se llaman modos, para una cierta frecuencia podrían existir varios modos.





## 2.2.3 Love: modos



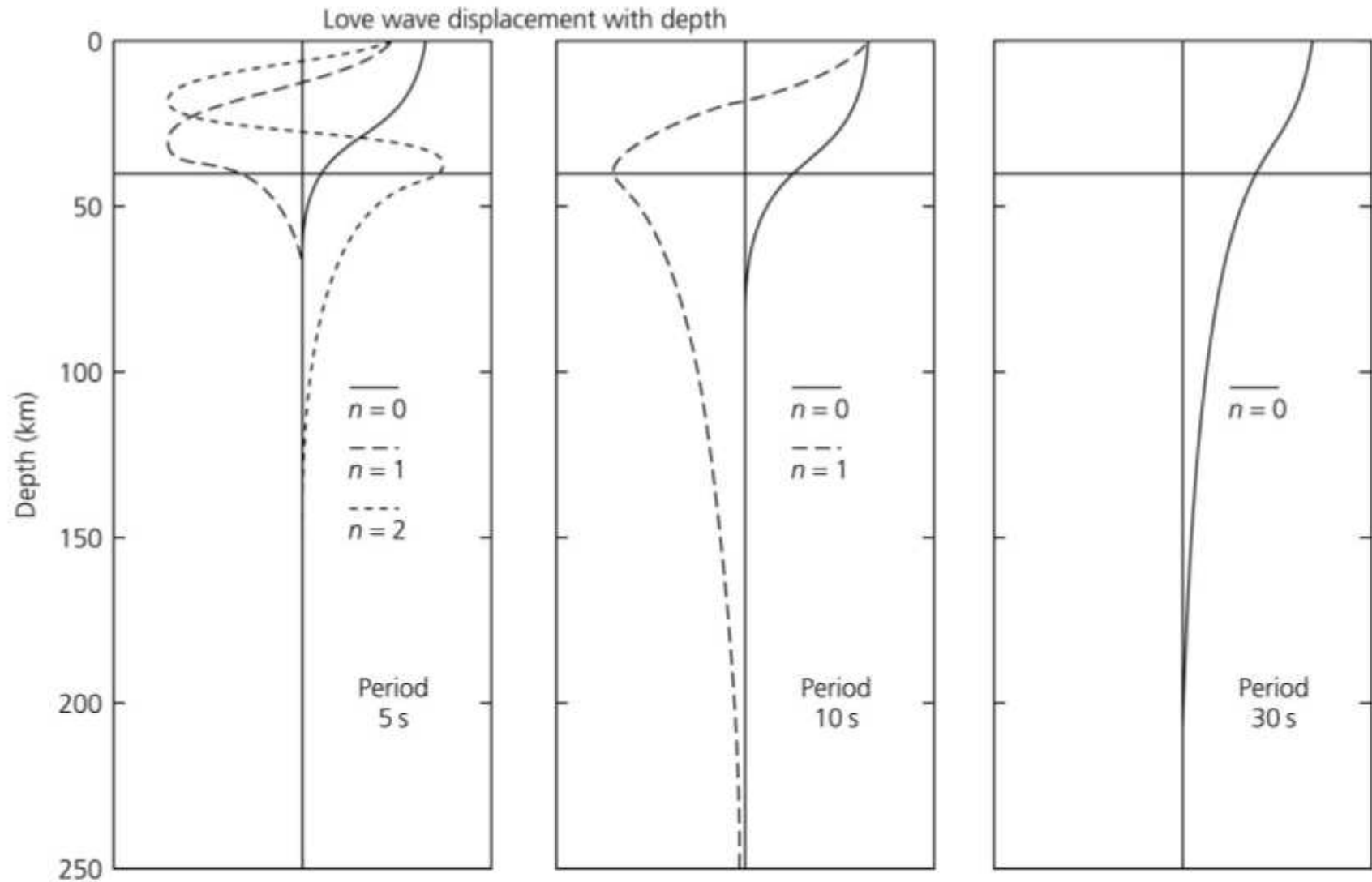


## 2.2.3 Love: modos

- La ecuación (2.23) solo tiene raíces reales (soluciones) para  $\beta_1 < c < \beta_2$ .
- En la figura anterior, la solución  $n = 0$  se llama el modo fundamental. Las otras están modos mayores o armónicos.
- El modo fundamental tiene la menor frecuencia, y velocidad, de todos los modos. Es típicamente lo mas importante para las onda Love generada por terremotos.
- Se nota que la velocidad de fase para la onda Love cambia con la frecuencia. Incluso en este ejemplo simplificado, las ondas Love muestran dispersión.



## 2.2.4 Love: movimiento particular





## 2.2.4 Love: movimiento particular

- Las ondas Love están hechas por ondas SH atrapadas en una capa, y debajo de esta capa la amplitud de la oscilación ( $u_2$ ) decae exponencialmente (onda evanescente).
- En el ejemplo en la diapositiva anterior, la capa de baja velocidad representa la corteza continental. Siempre las ondas Love están atrapadas en la corteza Terrestre, continental u oceánica. (Pero también ondas Love de alta frecuencia pueden estar atrapadas en una capa sedimentaria encima de la roca madre de una continente.)
- Se puede considerar esta capa como una guía de ondas. Los diferentes modos representan diferentes configuraciones de ondas atrapadas en la capa.
- Los modos mayores para la onda Love están “equivalentes” a los armónicos de instrumentos musicales.