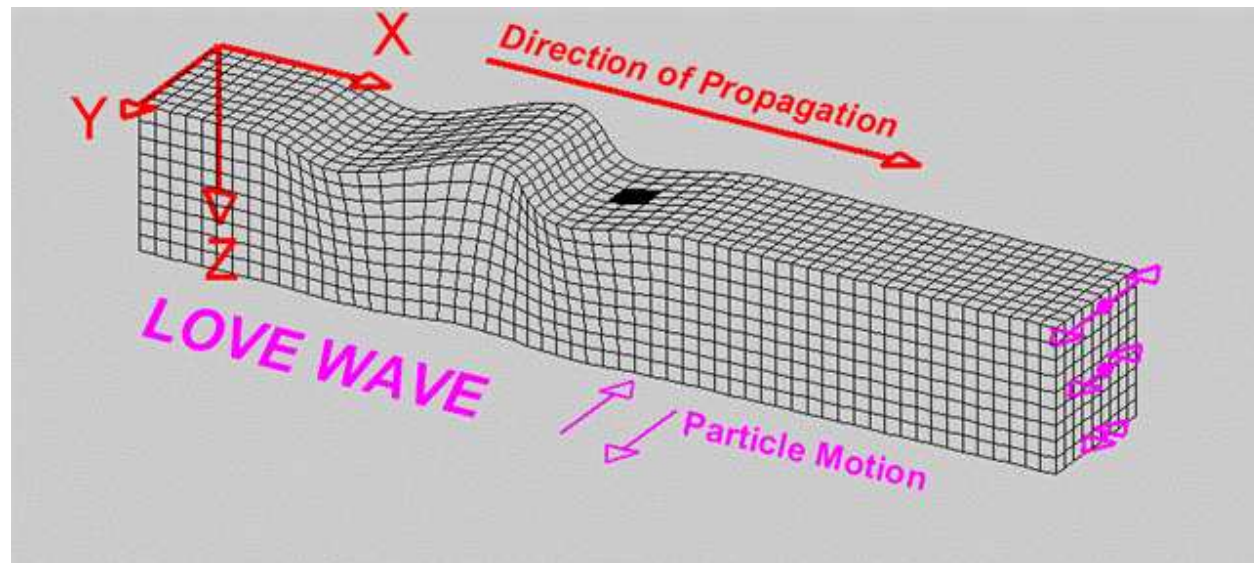
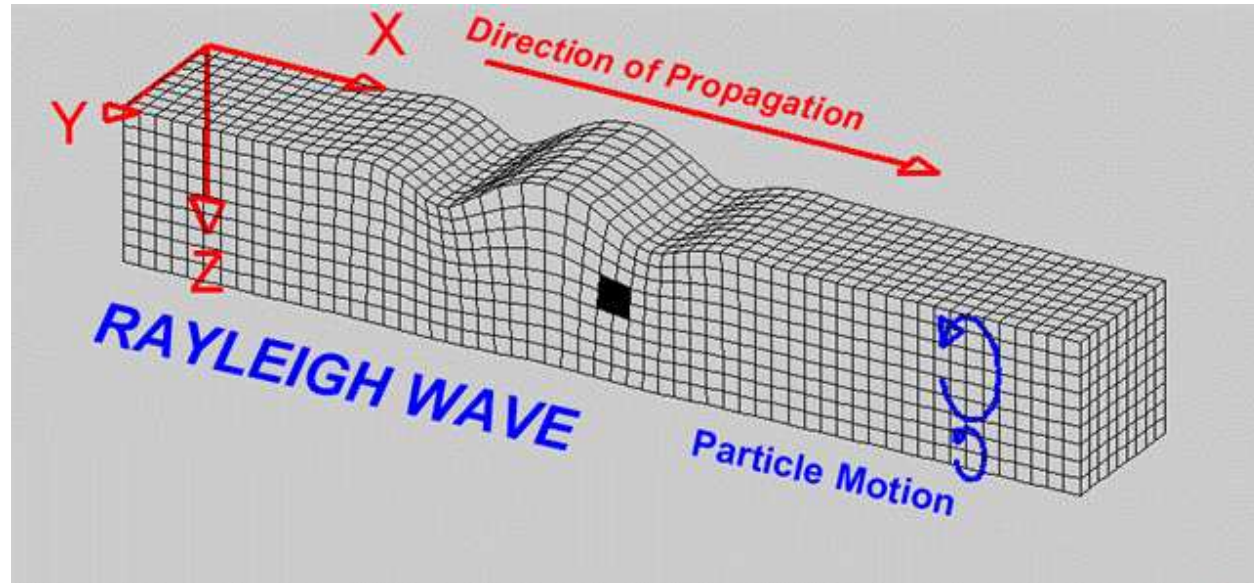
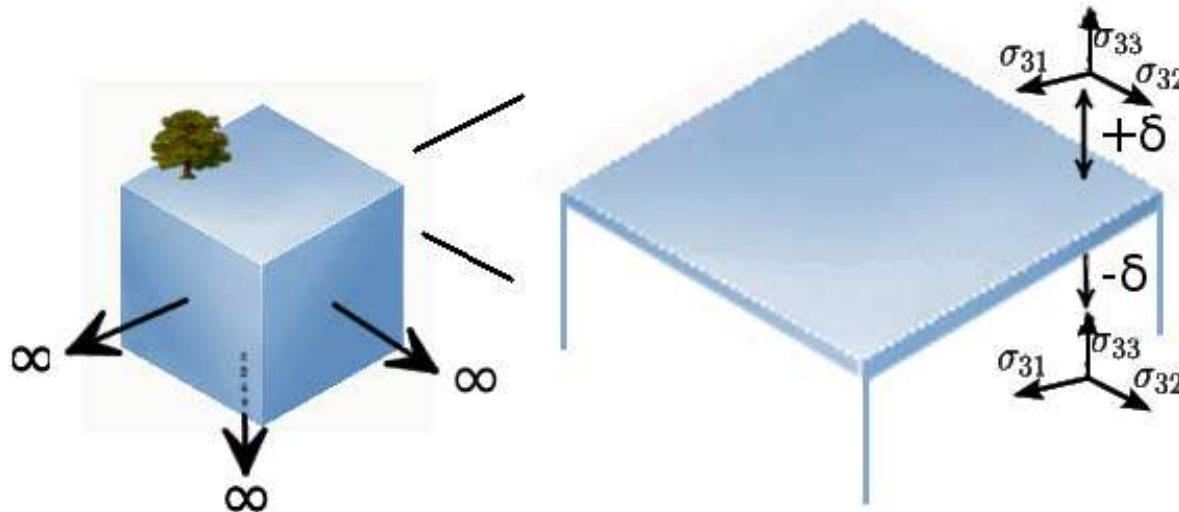


2 Ondas de superficie

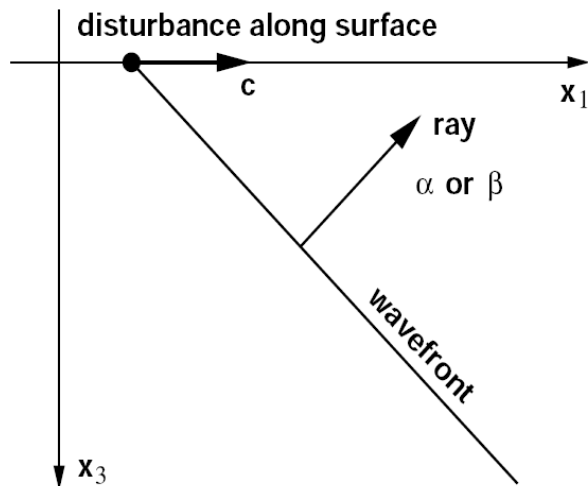


2.1 Semi espacio y superficie libre



- Un semi espacio es un medio homogéneo que ocupa la mitad de un volumen infinito.
- La superficie libre es la única superficie que tiene un semi espacio.
- A una distancia de $+\delta$ encima la superficie libre, en el vacío, los elementos del tensor de esfuerzo están ceros $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$.
- Hay continuidad de tracción a través de la superficie, entonces la condición de borde en la superficie es que $\sigma_{3j} = 0$.
- (Note que la tracción es una medida de presión que una superficie aplica al elemento de volumen conectado).

2.1.1 Ondas Rayleigh: formulación



- Consideremos ondas P y S, viajando en el plano $x_1 - x_3$ que interactúan con la superficie terrestre:
- SI** ellos generan una onda en la dirección x_1 (horizontal), los potenciales Φ y Ψ están:

$$\begin{aligned}\Phi \text{ que en esta clase llamaremos } \phi &= f(x_3)e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ \psi_2 \text{ que en esta clase llamaremos } \psi &= g(x_3)e^{i(kx_1 - \omega t)} \\ u_2 &= h(x_3)e^{i(kx_1 - \omega t)}\end{aligned}\tag{2.2}$$

- Note que podemos escribir u_2 en la forma de ψ_1 y ψ_3 si queremos, pero veremos que no vale la pena.



2.1.2 La ecuación de ondas

Los potenciales tienen que satisfacer la ecuación de movimiento en el medio (ver la sección 1.6)

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0 \\ \nabla^2 \psi - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0\end{aligned}$$

Por ejemplo, para el caso ϕ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= 0 \\ \left((ik)^2 f(x_3) + \frac{\partial^2 f(x_3)}{\partial x_3^2} - \frac{(i\omega)^2}{\alpha^2} f(x_3) \right) e^{i(kx_1 - \omega t)} &= 0 \\ f'' - k^2 f + \frac{\omega^2}{\alpha^2} f &= 0 \\ f'' + \left(\frac{\omega^2}{\alpha^2} - k^2 \right) f &= 0 \\ f'' + k^2 \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right) f &= 0\end{aligned}$$

En la última línea, hemos usado $\omega = ck$, donde c es la velocidad aparente de la onda en la dirección x_1 , es decir por la superficie (si existe esta onda).



2.1.2 La ecuación de ondas

Introducimos

$$r_\alpha = \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - 1} \quad r_\beta = \sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1}$$

Entonces, la función $f(x_3)$ tiene que satisfacer

$$f'' + k^2 r_\alpha^2 f = 0 \quad (2.3)$$

y similarmente $g'' + k^2 r_\beta^2 g = 0$ y $h'' + k^2 r_\beta^2 h = 0$. La solución entonces es

$$f(x_3) = A' e^{-ikr_\alpha x_3} + A e^{+ikr_\alpha x_3} \quad (2.5)$$

con soluciones similares para $g(x_3)$ y $h(x_3)$. En la próxima diapositiva vamos a ver que para una onda de superficie r_α y r_β están imaginarias, y que en este caso $A' = 0$ porque conservación de energía requiere que

$$f(x_3) \underset{x_3 \rightarrow \infty}{\lim} \rightarrow 0$$



2.1.2 La ecuación de ondas

Los tres posibles soluciones para f , g y h están:

1. $\beta < \alpha < c$. En este caso, r_α y r_β están reales. Esta situación representa ondas de cuerpo que se reflejan de la superficie (otro capítulo).

$$\begin{aligned} f &= A'e^{-ikr_\alpha x_3} + Ae^{+ikr_\alpha x_3} \quad \text{etc. para } g, h \\ \phi &\sim \text{cte.}e^{i(kx_1 - \omega t \pm kr_\alpha x_3)} \quad \text{etc...} \end{aligned}$$

note que r_α representa la tasa entre los componentes del vector de onda vertical:horizontal.

2. $\beta < c < \alpha$. En este caso, r_α esta imaginaria y r_β esta real. Entonces la onda P se propaga horizontalmente en la forma de una onda quasi-evanescente (ruido superficial, o, en inglés, *ground roll*).

$$\begin{aligned} f &= Ae^{-k|r_\alpha|x_3} \\ \phi &= Ae^{-k|r_\alpha|x_3}e^{i(kx_1 - \omega t)} \end{aligned}$$

Se nota que ϕ decae exponencialmente con profundidad (propiedad evanescente), pero esta onda continuamente pierde energía a las ondas SV (condiciones de borde) entonces esta onda no se propaga grandes distancias.



2.1.2 La ecuación de ondas

Los tres posibles soluciones (cont...)

3. $c < \beta < \alpha$. En este caso ambas r_α y r_β están imaginarias, y entonces

$$\phi, \psi, u_2 \sim \text{cte.} e^{-k|r_{\alpha,\beta}|x_3} e^{i(kx_1 - \omega t)}$$

- El tercer caso entrega una solución que representa una onda que viaja horizontalmente a una velocidad c , que es evanescente (atrapada en la superficie) y que es una cierta mezcla de las contribuciones de las ondas P, SV y SH.
- No hemos encontrado la onda Rayleigh todavía. La onda descrita arriba solamente existe si cumpla las condiciones de borde en la superficie libre. ¿Podría satisfacer las condiciones de borde? ¡Revisemos!



2.1.3 Condiciones de borde

Los potenciales están:

$$\begin{aligned}\phi &= Ae^{[ikr_\alpha x_3 + ik(x_1 - ct)]} \\ \psi &= Be^{[ikr_\beta x_3 + ik(x_1 - ct)]} \\ u_2 &= Ce^{[ikr_\beta x_3 + ik(x_1 - ct)]}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Y las condiciones de borde en la superficie libre ($x_3 = 0$) están $\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} = 0$. Recuerde, del capítulo anterior (ver ecuaciones (1.2), (1.6), (1.16)):

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ \mathbf{u} &= \nabla\Phi + \nabla \times \Psi\end{aligned}$$

Entonces, en la notación de esta clase,

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ u_3 &= \frac{\partial\phi}{\partial x_3} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\end{aligned}$$

2.1.3 Condiciones de borde

○ $\sigma_{31} = 0$

$$\begin{aligned} 2\mu\epsilon_{31} &= 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_3^2} &= 0 \end{aligned}$$

O, en otra notación

$$2\phi_{,31} + \psi_{,11} - \psi_{,33} = 0 \quad (2.7a)$$

○ $\sigma_{33} = 0$

$$\begin{aligned} \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\mu\epsilon_{33} &= 0 \\ \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}$$

Cambiando la notación de nuevo

$$\begin{aligned} \lambda(\phi_{,11} - \psi_{,31} + \phi_{,33} + \psi_{,13}) + 2\mu(\phi_{,33} + \psi_{,13}) &= 0 \\ (\lambda + 2\mu)\phi_{,33} + \lambda\phi_{,11} + 2\mu\psi_{,13} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7b)$$



2.1.3 Condiciones de borde

○ $\sigma_{32} = 0$

$$2\mu\epsilon_{32} = 0$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$$

O, en otra notación

$$u_{2,3} = 0 \tag{2.7c}$$

Para cumplir la condición de borde (2.7c), con las ecuaciones (2.6), tenemos $C = 0$. Entonces $u_2 = 0$. La primera condición para que existe una onda de superficie, hecha por la interacción entre ondas P y S, es que las ondas SH no entran al sistema. (Esta no es una gran sorpresa, dado que el sistema P-SV es desacoplado del sistema SH).



2.1.3 Condiciones de borde

Para cumplir las otras condiciones de borde (2.7a) y (2.7b), pongamos las expresiones para ϕ y ψ de la ecuación (2.6) dentro de las dos ecuaciones que dan las condiciones de borde (recuerde que la condición de borde se satisface en la superficie, es decir $x_3 = 0$):

1.

$$\begin{aligned}2\phi_{,31} + \psi_{,11} - \psi_{,33} &= 0 \\2A(ikr_\alpha)(ik) + B(ik)^2 - B(ikr_\beta)^2 &= 0 \\-2Ak^2r_\alpha - Bk^2 + Bk^2r_\beta^2 &= 0 \\2r_\alpha A + (1 - r_\beta^2)B &= 0\end{aligned}\tag{2.8a}$$

2. [Requiere $\lambda + 2\mu = \alpha^2\rho$, $\mu = \beta^2\rho$, $\lambda = (\alpha^2 - 2\beta^2)\rho$]

$$\begin{aligned}(\lambda + 2\mu)\phi_{,33} + \lambda\phi_{,11} + 2\mu\psi_{,13} &= 0 \\(\lambda + 2\mu)A(ikr_\alpha)^2 + \lambda A(ik)^2 + 2\mu B(ik)(ikr_\beta) &= 0 \\-(\lambda + 2\mu)Ar_\alpha^2 - \lambda A - 2\mu Br_\beta &= 0 \\\alpha^2 Ar_\alpha^2 + (\alpha^2 - 2\beta^2)A + 2\beta^2 Br_\beta &= 0 \\\left[\alpha^2(r_\alpha^2 + 1) - 2\beta^2\right] A + 2\beta^2 r_\beta B &= 0\end{aligned}\tag{2.8b}$$

Buscamos la solución simultánea de (2.8a) y (2.8b) para cumplir las condiciones de borde.



2.1.3 Condiciones de borde

Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la solución no-trivial ($A \neq 0$, $B \neq 0$) requiere $(ad - bc) = 0$. En nuestro caso

$$[\alpha^2(r_\alpha^2 + 1) - 2\beta^2](1 - r_\beta^2) - 4r_\alpha r_\beta \beta^2 = 0 \quad (2.9)$$

Usando $r_\alpha = \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - 1}$ y $r_\beta = \sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1}$:

$$\begin{aligned} \left[\alpha^2 \left(\frac{c^2}{\alpha^2} \right) - 2\beta^2 \right] \left[2 - \frac{c^2}{\beta^2} \right] &= 4 \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - 1} \sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1} \beta^2 = 0 \\ (c^2 - 2\beta^2) \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2} \right) &= 4 \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right)^{1/2} \beta^2 = 0 \\ \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 2 \right) \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2} \right) &= 4 \left(\frac{c^2}{\beta^2} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{c^2}{\alpha^2} - 1 \right)^{1/2} \\ \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2} \right)^2 &= 4 \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{\alpha^2} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) es el requisito para que existe la onda evanescente que viaja horizontalmente.



2.1.4 Para un sólido de Poisson

Encontraremos la solución para un sólido de Poisson ($\lambda = \mu \Rightarrow \alpha^2 = 3\beta^2$):

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^2 &= 4 \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{c^2}{3\beta^2}\right)^{1/2} \\ \left(2 - \frac{c^2}{\beta^2}\right)^4 &= 16 \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{3\beta^2}\right) \\ 16 - 32\frac{c^2}{\beta^2} + 24\frac{c^4}{\beta^4} - 8\frac{c^6}{\beta^6} + \frac{c^8}{\beta^8} &= 16 \left(1 - \frac{c^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{3\beta^2} + \frac{c^4}{3\beta^4}\right) \quad (2.11) \\ -32\frac{c^2}{\beta^2} + 24\frac{c^4}{\beta^4} - 8\frac{c^6}{\beta^6} + \frac{c^8}{\beta^8} &= -\frac{64}{3}\frac{c^2}{\beta^2} + \frac{16}{3}\frac{c^4}{\beta^4} \\ \frac{c^2}{\beta^2} \left(\frac{c^6}{\beta^6} - 8\frac{c^4}{\beta^4} + \frac{56}{3}\frac{c^2}{\beta^2} - \frac{32}{3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de (2.11) son:

- $c^2/\beta^2 = 0$. Una solución trivial - el medio en equilibrio sin ondas presentes cumpla las condiciones de borde.
- $c^2/\beta^2 = 4$ y $c^2/\beta^2 = 2 + 2/\sqrt{3}$. Significa que $\beta < \alpha < c$ y entonces, con r_α y r_β números reales, el constraint $A' = 0$ puesto en la página 5 no se cumpla. No son soluciones actuales.
- $c^2/\beta^2 = 2 - 2/\sqrt{3} = 0.8453$. Significa que $c < \beta < \alpha$ que implica que **existe una onda de superficie que cumpla las condiciones de borde. Esta onda es la onda Rayleigh.**



2.1.5 Onda Rayleigh: propiedades

$$c^2/\beta^2 = 0.8453 \Rightarrow c = 0.92\beta \quad (2.12)$$

La velocidad horizontal de una onda Rayleigh (en un semi espacio homogéneo) es independiente de su frecuencia y $\sim 92\%$ de la velocidad de la onda S.

$$\begin{aligned} r_\beta &= \sqrt{\frac{c^2}{\beta^2} - 1} = \sqrt{0.8453 - 1} = 0.393i & , & \quad r_\beta^2 = -0.155 \\ r_\alpha &= \sqrt{\frac{c^2}{\alpha^2} - 1} = \sqrt{(0.8453/3) - 1} = 0.847i & , & \quad r_\alpha^2 = -0.718 \end{aligned}$$

De la ecuación (2.8):

$$\begin{aligned} 2r_\alpha A + (1 - r_\beta^2)B &= 0 \\ B &= \frac{-2r_\alpha}{1 - r_\beta^2} A = \frac{-1.694i}{1.155} A \approx -1.47iA \end{aligned}$$

Ahora estamos preparados para calcular los desplazamientos u_1 y u_3 asociados con la onda Rayleigh (recuerde que $u_2 = 0$).

2.1.5 Onda Rayleigh: propiedades

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \\
 &= A i k r_\alpha e^{[i k r_\alpha x_3 + i k (x_1 - ct)]} - B i k r_\beta e^{[i k r_\beta x_3 + i k (x_1 - ct)]} \\
 &= (A i k e^{-0.85 k x_3} - B i k r_\beta e^{-0.39 k x_3}) e^{i k (x_1 - ct)} \\
 &= -A k \sin(k x_1 - \omega t) (e^{-0.85 k x_3} - 0.58 e^{-0.39 k x_3})
 \end{aligned} \tag{2.13a}$$

En $x_3 = 0$, la superficie (usando la definición de un nuevo constante $a = -A k$):

$$u_1 = 0.42 a \sin(k x_1 - \omega t) \tag{2.14a}$$

$$\begin{aligned}
 u_3 &= \frac{\partial \phi}{\partial x_3} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\
 &= A i k r_\alpha e^{[i k r_\alpha x_3 + i k (x_1 - ct)]} + B i k e^{[i k r_\beta x_3 + i k (x_1 - ct)]} \\
 &= (A i k r_\alpha e^{-0.85 k x_3} + B i k e^{-0.39 k x_3}) e^{i k (x_1 - ct)} \\
 &= -A k \cos(k x_1 - \omega t) (0.85 e^{-0.85 k x_3} - 1.47 e^{-0.39 k x_3})
 \end{aligned} \tag{2.13b}$$

Y en la superficie:

$$u_3 = -0.62 a \cos(k x_1 - \omega t) \tag{2.14b}$$



2.1.6 Rayleigh: movimiento particular

- En nuestro la onda Rayleigh se propaga en la dirección $+\hat{x}$.
- El eje \hat{z} representa profundidad: apunta hacia abajo.
- En la superficie:

$$u_1 = 0.42a \sin(kx_1 - \omega t) \quad , \quad u_3 = -0.62a \cos(kx_1 - \omega t)$$

- En una cierta posición fija (como $x_1 = 0$ por ejemplo):

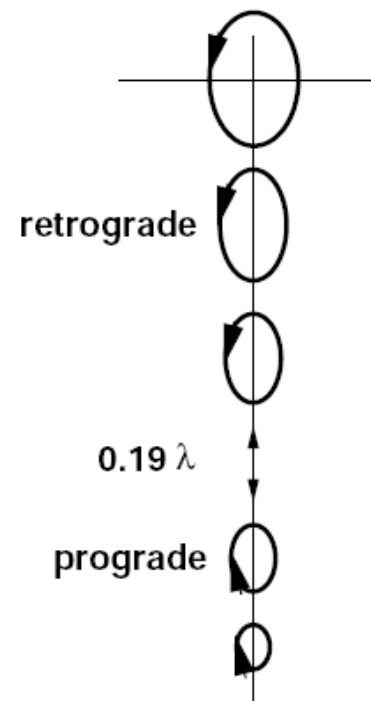
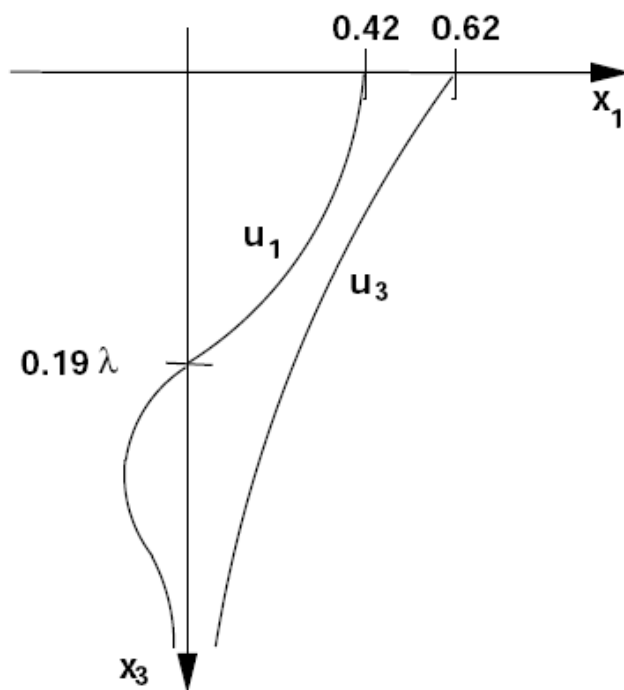
$$u_1 = -0.42a \sin(\omega t) \quad , \quad u_3 = -0.62a \cos(\omega t)$$

ωt	u_1	u_3
0	0	$-0.62a$
$\pi/2$	$-0.42a$	0
π	0	$0.62a$
$3\pi/2$	$0.42a$	0
etc.		

- El movimiento particular es retrogrado elíptico en la superficie de la Tierra.

2.1.6 Rayleigh: movimiento particular

- La variación de $|u_1|$ y $|u_3|$ con profundidad significa que el movimiento particular cambia de retrogrado elíptico en la superficie al progrado elíptico a profundidades.



2.1.7 Rayleigh: sismograma

- La onda Rayleigh llega en los componentes vertical-radial de un sismograma con movimiento retrogrado elíptico.

