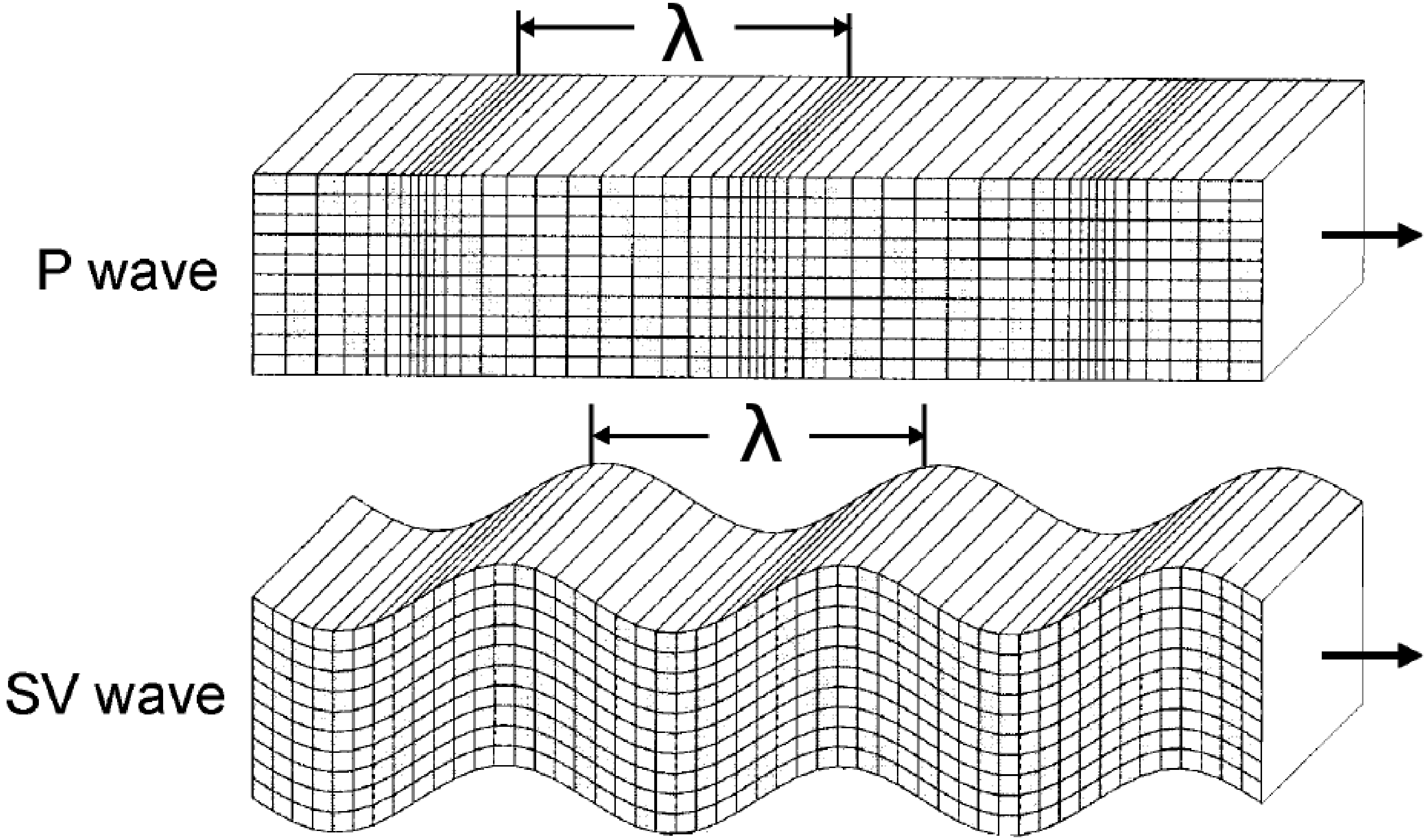
Sismología Aplicada y de Exploración

513430 - Sismología Aplicada y de Exploración
Apuntes adicionales
Matt Miller
http://mttmllr.com/sismologia.htm

1 Ondas de cuerpo



1.1 Deformación

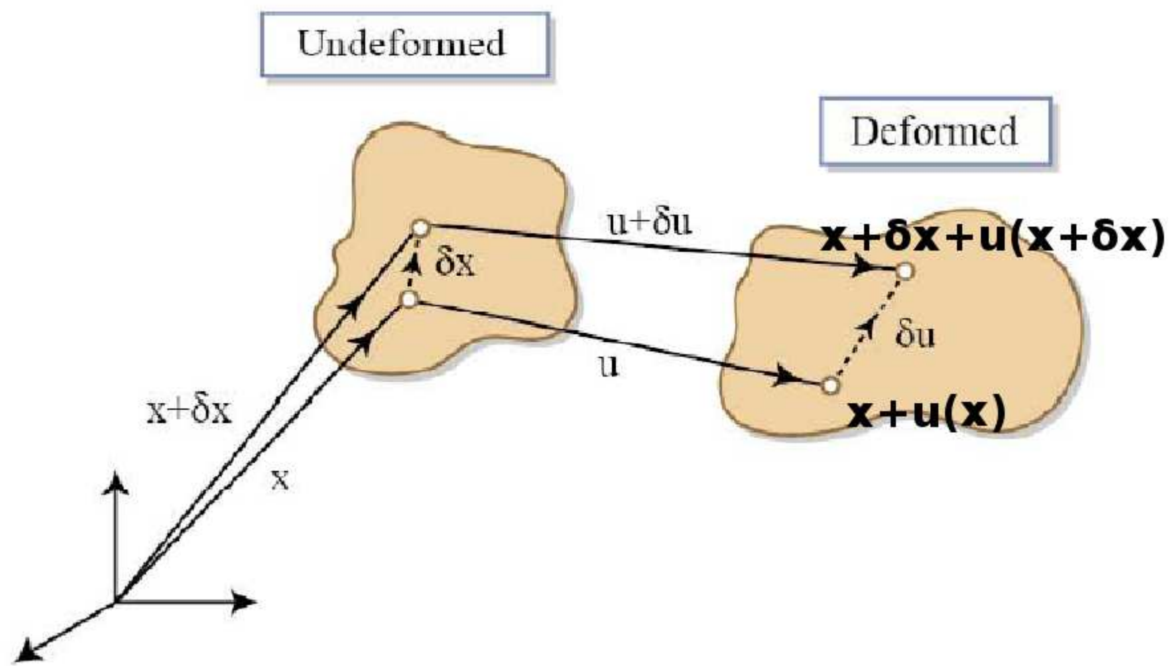
En una dimensión:

- x es una posición en el medio.
- u es el desplazamiento de esta posición x desde su punto de equilibrio.
- La deformación en esta situación, denominada ϵ_{11}, es:

$$\epsilon_{11} = \frac{l_2 - l_1}{l_1} = \frac{u(x+\delta x) - u(x)}{\delta x} \simeq \frac{\delta u}{\delta x} \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} + \frac{\partial u(x)}{\partial x}\right) \qquad (1.1)$$

1.1 Deformación

En tres dimensiones:



Change in relative displacement during deformation.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta x}) \simeq \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

1.1 Deformación

En otras palabras ...

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta x}) \simeq \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{J}\boldsymbol{d}$$

Podemos escribir $\boldsymbol{J}$ en componentes simétricos y asimétricos, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\Omega}$:

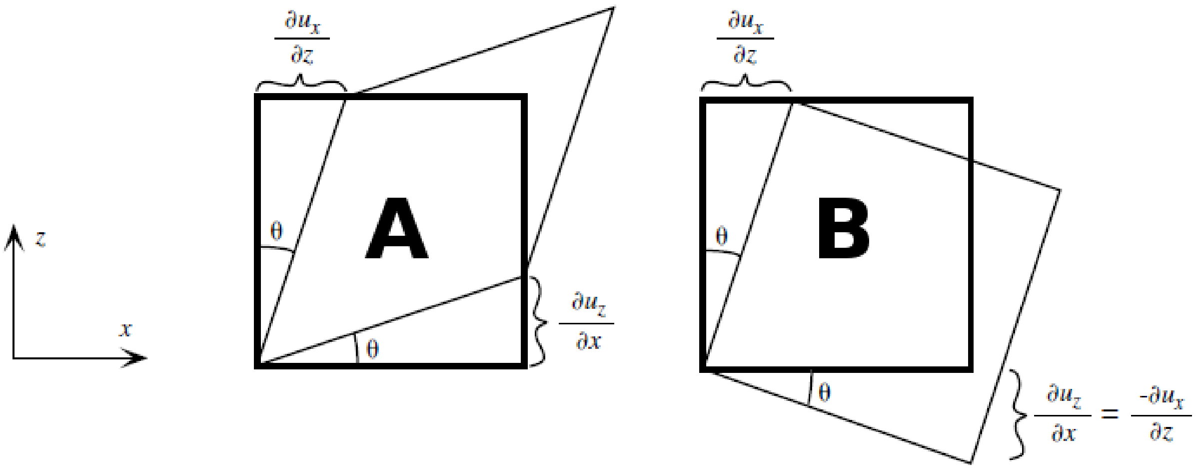
$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

Aquí, $\boldsymbol{\epsilon}$ es el tensor de deformación y $\boldsymbol{\Omega}$ es el tensor de rotación.

1.1 Deformación

Un ejemplo en 2 dimensiones:



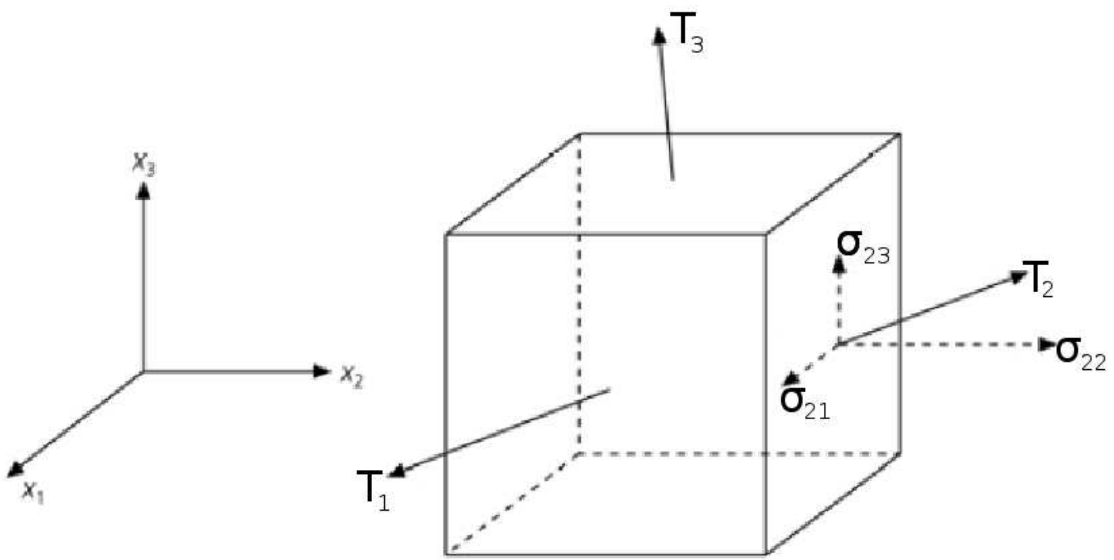
$$\boldsymbol{J_A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{J_B} \simeq \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Una deformación del elemento de área tiene un tensor simétrico, y una rotación tiene un tensor asimétrico. En sismología trabajamos en un marco de referencia en que el medio no se esta girando, entonces podemos representar la deformación del medio por el tensor de deformación:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u(x_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial u(x_j)}{\partial x_i}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.2}$$

1.2 Esfuerzo

Consideremos un elemento de volumen en el medio:



Los tres vectores de tracción $\boldsymbol{T_1}$, $\boldsymbol{T_2}$ y $\boldsymbol{T_3}$ representan las fuerzas por unidad de área sobre las tres caras del cubo infinitesimal.
Para describir las fuerzas que actúan en un punto de un medio tres dimensional, requerimos nueve elementos del tensor de esfuerzo σ_{ij}. La relación entre las tracciones y el esfuerzo es:

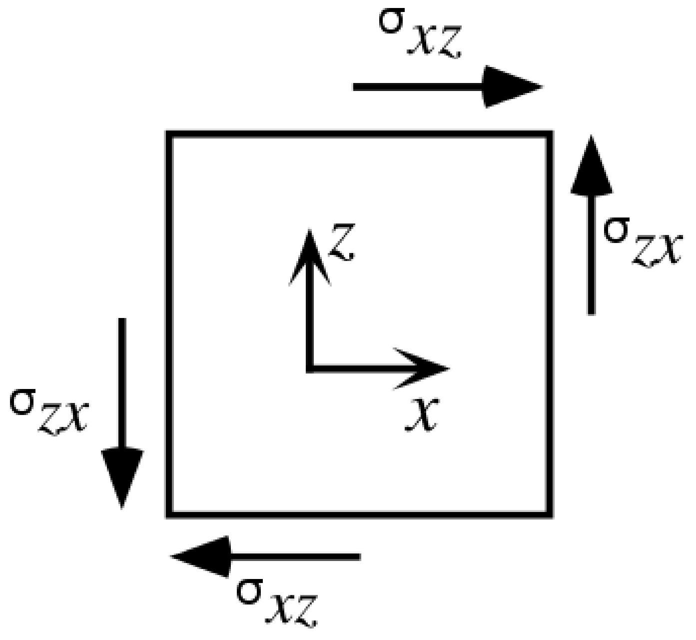
$$T_i = \sigma_{ij} n_j \equiv \sigma_{ji} n_j \tag{1.3}$$

1.2 Esfuerzo

En el marco de referencia en que el medio no se esta girando, lo que aplica en sismología:

- Los esfuerzos no dan rotación.
- Entonces, el tensor de esfuerzo es simétrico.

Por ejemplo, en el plano $x - z$, la balanza de los torques significa que $\sigma_{13} = \sigma_{31}$



1.3 La ecuación de movimiento

La relación general entre el esfuerzo y la deformación es

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{1.4}$$

y para un medio homogéneo, isotrópico, continuo y elástico

$$c_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{1.5}$$

λ y μ son los parámetros del Lamé, asociados con el medio:

- μ es su rigidez (la resistencia contra las fuerzas de cizalle).
- $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ es su módulo de incompresibilidad (la resistencia contra las fuerzas de compresión).

La combinación de (1.4) y (1.5) da

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} \tag{1.6}$$

Note que $\epsilon_{kk} \equiv \Delta$ que representa la dilatación cubica.

1.3 La ecuación de movimiento

La ecuación de movimiento para un cierto volumen V es

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV = \oint_S T_i dS + \int_V f_i dV = \oint_S \sigma_{ij} n_j dS + \int_V f_i dV \tag{1.7}$$

Usamos el teorema de divergencia de Gauss, $\oint_S a_i n_i dS = \int_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV$, y ignoramos las fuerzas de cuerpo (valida para sismología de frecuencias $\gtrsim$ 0.003 Hz), y entonces

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \tag{1.8}$$

Podemos usar la relación entre el esfuerzo y la deformación de antes, y la simetría del tensor de deformación, para llegar al

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \tag{1.9}$$

1.3 La ecuación de movimiento

Entonces para un medio simple, con λ y μ constante (esta suposición requiere mas justificación, porque claramente estos parámetros de Lamé varían dentro de la Tierra, volveremos a este punto en una otra clase),

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \mu\delta_{il}\delta_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \\
&= \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\
&= \lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\
\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} &= \lambda\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + \mu\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u})
\end{aligned}$$

En la última línea hemos vuelto a la notación vectorial.

1.3 La ecuación de movimiento

Entonces ...

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \mu\nabla^2\boldsymbol{u} \tag{1.10}$$

y usamos la identidad vectorial,

$$\nabla^2\boldsymbol{u} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - (\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u})$$

para llegar a la ecuación de movimiento usada en sismología:

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \underbrace{(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u})}_{\text{parte dilatacional}} - \underbrace{\mu(\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u})}_{\text{parte de cizalle}} \tag{1.11}$$

1.4 Ondas-*P*

Como hemos visto en GTS, tomando la divergencia de la ecuación (1.11), y recordando que

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\mathrm{algo}}) = 0$$

nos llega al

$$\rho \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{u})}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \tag{1.12}$$

Esta ecuación muestra que cualquier distorsión que esta asociada con un cambio en el volumen de los elementos del medio ($\nabla \cdot \boldsymbol{u}$) se va a propagar en la forma de una onda con una velocidad de

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \tag{1.13}$$

Eso es una onda-*P*!

1.5 Ondas-*S*

Tomando el rotor de la ecuación (1.11), usando

$$\nabla \times \nabla \vec{\text{algo}} = 0$$

y una variación en la identidad vectorial usada antes

$$\nabla^2(\nabla \times \vec{\text{algo}}) = \cancelto{0}{\nabla(\nabla \cdot (\nabla \times \vec{\text{algo}}))} - (\nabla \times \nabla \times (\nabla \times \vec{\text{algo}}))$$

nos llega al

$$\rho \frac{\partial^2 (\nabla \times \boldsymbol{u})}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 (\nabla \times \boldsymbol{u}) \qquad (1.14)$$

Esta ecuación muestra que cualquier distorsión que esta asociada con una perturbación de cizalle de los elementos del medio ($\nabla \times \boldsymbol{u}$) se va a propagar en la forma de una onda con una velocidad de

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (1.15)$$

Eso es una onda-*S*!

1.6 La descomposición de Helmholtz

En el caso general, el desplazamiento en el medio $\boldsymbol{u}$ puede ser representado por:

- un potencial escalar Φ
- y un potencial vectorial (sin divergencia) $\boldsymbol{\Psi}$

$$\boldsymbol{u} = \nabla\Phi + \nabla\times\boldsymbol{\Psi} \quad ; \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\Psi} = 0 \tag{1.16}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\boldsymbol{u} &= \nabla^2\Phi \\
\nabla\times\boldsymbol{u} &= \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\Psi} = \cancelto{0}{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\Psi})} - \nabla^2\boldsymbol{\Psi}
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (1.12) y (1.14) entonces:

$$\begin{aligned}
\nabla^2(\nabla^2\Phi) - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla^2\Phi) &= 0 \\
\nabla^2\left[\nabla^2\Phi - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right] &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\nabla^2(\nabla^2\boldsymbol{\Psi}) + \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla^2\boldsymbol{\Psi}) &= 0 \\
\nabla^2\left[\nabla^2\boldsymbol{\Psi} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\Psi}}{\partial t^2}\right] &= 0
\end{aligned}$$

1.6 La descomposición de Helmholtz

Del análisis anterior, se puede apreciar que con el desplazamiento $\boldsymbol{u}$ escrito en esta manera:

- Φ representa el desplazamiento asociado con la onda-P.
- $\boldsymbol{\Psi}$ representa el desplazamiento asociado con la onda-S.

Para una onda plana que se propaga en el plano $x - z$ (que significa que no hay ningún variación en las propiedades de la onda (fase, amplitud) en la dirección $\hat{y}$; en términos matemáticos $\frac{\partial}{\partial y} ... = 0$), el campo de desplazamiento es

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u_P} + \boldsymbol{u_S} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x}\right)\hat{z} \qquad (1.17)$$

- El desplazamiento de esta onda esta en las direcciones $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$.
- La onda P tiene movimiento particular en el plano $x - z$ (Φ).
- La onda S tiene dos componentes, la SH con movimiento particular en la dirección $\hat{y}$ (Ψ_x, Ψ_z),
- y la SV con movimiento particular en el plano $x - z$ (Ψ_y).

1.7 Ondas Planas

Ondas planas, las soluciones a la ecuación de ondas, pueden estar representadas por:

$$\Phi = Ae^{i(\boldsymbol{k_\alpha} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{B}e^{i(\boldsymbol{k_\beta} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{1.19}$$

con

$$k_\alpha = \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)\hat{k}, \text{ y } k_\beta = \left(\frac{\omega}{\beta}\right)\hat{k} \tag{1.20}$$

$\hat{k}$ es en la dirección de propagación de la onda.