

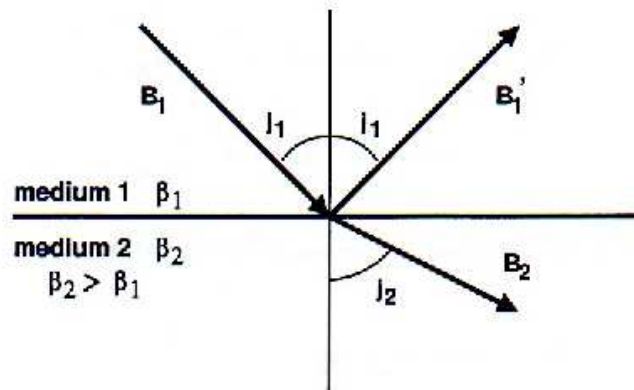


# 11 Reflexión y transmisión en interfases

- La aproximación de rayos es una solución válida para la ecuación de ondas cuando la frecuencia es suficientemente alta para que los parámetros elásticos del medio, y la amplitud de la onda, no cambien apreciablemente en una longitud de onda.
- En fronteras entre dos diferentes medios, como corteza-manto, existen grandes contrastes de velocidad.
- En estas fronteras se pueden aplicar condiciones de borde para calcular como se transmiten o reflejan las ondas sísmicas.
- En el anexo A, se muestra que una consecuencia de la continuidad de desplazamiento y tracciones en una interfase es que  $k_1$ , el componente del vector de onda en la dirección horizontal, debe ser igual para cada onda reflejada o transmitida en una interfase.
- Esta condición nos entrega la ley de Snell:

$$\frac{\sin i_1}{\alpha_1} = \frac{\sin i_2}{\alpha_2} = \frac{\sin j_1}{\beta_1} = \frac{\sin j_2}{\beta_2} \quad (\text{A.6})$$

# 11.1 SH reflexión y transmisión



- La reflexión y transmisión de ondas SH es el caso más simple, porque no es acoplado al sistema P-SV.
- En el medio 1, existe una onda incidente y una onda reflejada.

$$u_2^{(1)}(x_1, x_3, t) = B_1 e^{i(k_1 x_1 + k_1 r_{\beta_1} x_3 - \omega t)} + B_1' e^{i(k_1 x_1 - k_1 r_{\beta_1} x_3 - \omega t)} \quad (11.2)$$

- En el medio 2, existe una onda transmitida.

$$u_2^{(2)}(x_1, x_3, t) = B_2 e^{i(k_1 x_1 + k_1 r_{\beta_2} x_3 - \omega t)} \quad (11.3)$$



## 11.1 SH reflexión y transmisión

- Consideremos una interfase fusionada, es decir que el medio mueve en tal manera para que no aparece rasgaduras en la interfase entre los dos medios (una buena aproximación para interfases dentro de la Tierra sujetas a grandes presiones).
- Esta suposición introduce una condición de borde: la continuidad de desplazamiento a través de la interfase.
- Definimos la interfase en una posición  $x_3 = 0$ . Podemos usar un valor distinto de cero aquí pero el resultado no cambiará (solamente los pasos intermedios se pongan un poco mas complejo).

$$\begin{aligned} u_2^{①} \Big|_{x_3=0} &= u_2^{②} \Big|_{x_3=0} \\ \implies (B_1 + B'_1)e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} &= B_2 e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ \implies B_1 + B'_1 &= B_2 \end{aligned} \quad (11.4)$$

- Se puede ver que esta condición de borde introduce una relación entre las amplitudes de la ondas incidente, reflectadas y transmitidas.



## 11.1 SH reflexión y transmisión

- Para cumplir la primera condición de borde, requerimos además la continuidad de tracciones a través de la interfase.
- Las tracciones, las fuerzas por unidad de área, que actúan en la interfase (con vector normal en la dirección vertical), están

$$T_i = \sigma_{ij}n_j = (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \quad (11.5)$$

- Para el caso SH,  $\sigma_{13} = \sigma_{33} = 0$ , entonces estos componentes están automáticamente continuos.

- Para la continuidad de  $\sigma_{23} = 2\mu\epsilon_{23} = \mu \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$

$$\begin{aligned} \mu_1 i k_1 r_{\beta_1} (B_1 - B'_1) e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} &= \mu_2 i k_1 r_{\beta_2} B_2 e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} \\ \implies (B_1 - B'_1) &= B_2 \left( \frac{\mu_2 r_{\beta_2}}{\mu_1 r_{\beta_1}} \right) \end{aligned} \quad (11.7)$$



# 11.1 SH reflexión y transmisión

- Recuerden que

$$r_{\beta} = \frac{k_3}{k_1} = \left( \frac{c^2}{\beta^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (\text{A.4})$$

con

$$c = \frac{\beta}{\sin j}$$

- Entonces si las propiedades físicas de los dos medios, y el ángulo de incidencia de la onda SH, están conocidos, podemos calcular las amplitudes relativas entre  $B_1$ ,  $B_1'$  y  $B_2$ . Estas son los coeficientes de reflexión y transmisión para el caso SH.

$$\begin{aligned} R_{11'} &= \frac{B_1'}{B_1} = \frac{\mu_1 r_{\beta_1} - \mu_2 r_{\beta_2}}{\mu_1 r_{\beta_1} + \mu_2 r_{\beta_2}} \\ T_{12} &= \frac{B_2}{B_1} = \frac{2\mu_1 r_{\beta_1}}{\mu_1 r_{\beta_1} + \mu_2 r_{\beta_2}} \end{aligned} \quad (11.8)$$



# 11.1 SH reflexión y transmisión

- Podemos explícitamente escribir los coeficientes en términos del ángulo de inclinación de las ondas, y las densidades y velocidades de los medios. Usamos

$$\begin{aligned}r_{\beta_i} &= \sqrt{\frac{c^2}{\beta_i^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 j_i} - 1} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 j_i}{\sin^2 j_i}} \\ &= \frac{\cos j_i}{\sin j_i} \equiv \frac{\beta_i}{\sin j_i} \frac{\cos j_i}{\beta_i} = P^{-1} \frac{\cos j_i}{\beta_i}\end{aligned}$$

con  $P$  el parámetro del rayo, constante para los dos medios debido a la ley de Snell, y

$$\mu_i = \beta_i^2 \rho_i$$

- Entonces:

$$\begin{aligned}R_{11'} &= \frac{\rho_1 \beta_1 \cos j_1 - \rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\rho_1 \beta_1 \cos j_1 + \rho_2 \beta_2 \cos j_2} \\ T_{12} &= \frac{2 \rho_1 \beta_1 \cos j_1}{\rho_1 \beta_1 \cos j_1 + \rho_2 \beta_2 \cos j_2}\end{aligned}\tag{11.10}$$



# 11.1 SH reflexión y transmisión

Cosas que notar:

- $1 + R_{11}' = T_{12}$ .
- Hay mayor reflexión cuando hay mayor diferencia entre los medios.
- Cuando  $\mu_2 = 0$  para una superficie libre, hay reflexión total interna con  $R_{11}' = 1$ . (¿Qué significa  $T_{12} = 2$  en este caso?)
- La solución cuando el medio 1  $\equiv$  el medio 2 es la solución que se esperaba.
- Con mayor ángulo de incidencia, hay mayor reflexión. Entonces es posible tener ondas atrapadas en capas de baja velocidad (estilo guía de ondas).
- Sedimentos poco consolidados pueden amplificar ondas sísmicas que vienen de la roca madre (se ve eso en una tarea).

# 11.1 SH reflexión y transmisión

## 2.6.3 Energy flux for reflected and transmitted SH waves

$$\text{Energy flux } \dot{\mathbf{E}} = A^2 \omega^2 \rho \beta / 2$$

Lengths of wavefronts are  $\cos j_1 dx$  for the incident and reflected waves, and  $\cos j_2 dx$  for the transmitted wave.

$$\dot{\mathbf{E}}_I = \omega^2 \rho_1 \beta_1 \cos j_1 / 2$$

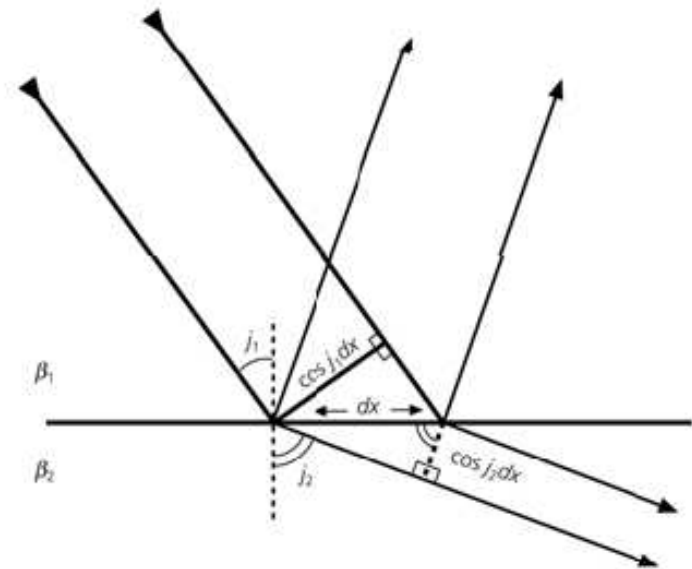
$$\dot{\mathbf{E}}_R = R_{12}^2 \omega^2 \rho_1 \beta_1 \cos j_1 / 2$$

$$\dot{\mathbf{E}}_T = T_{12}^2 \omega^2 \rho_2 \beta_2 \cos j_2 / 2$$

$$\text{Conservation of energy: } \dot{\mathbf{E}}_I = \dot{\mathbf{E}}_R + \dot{\mathbf{E}}_T$$

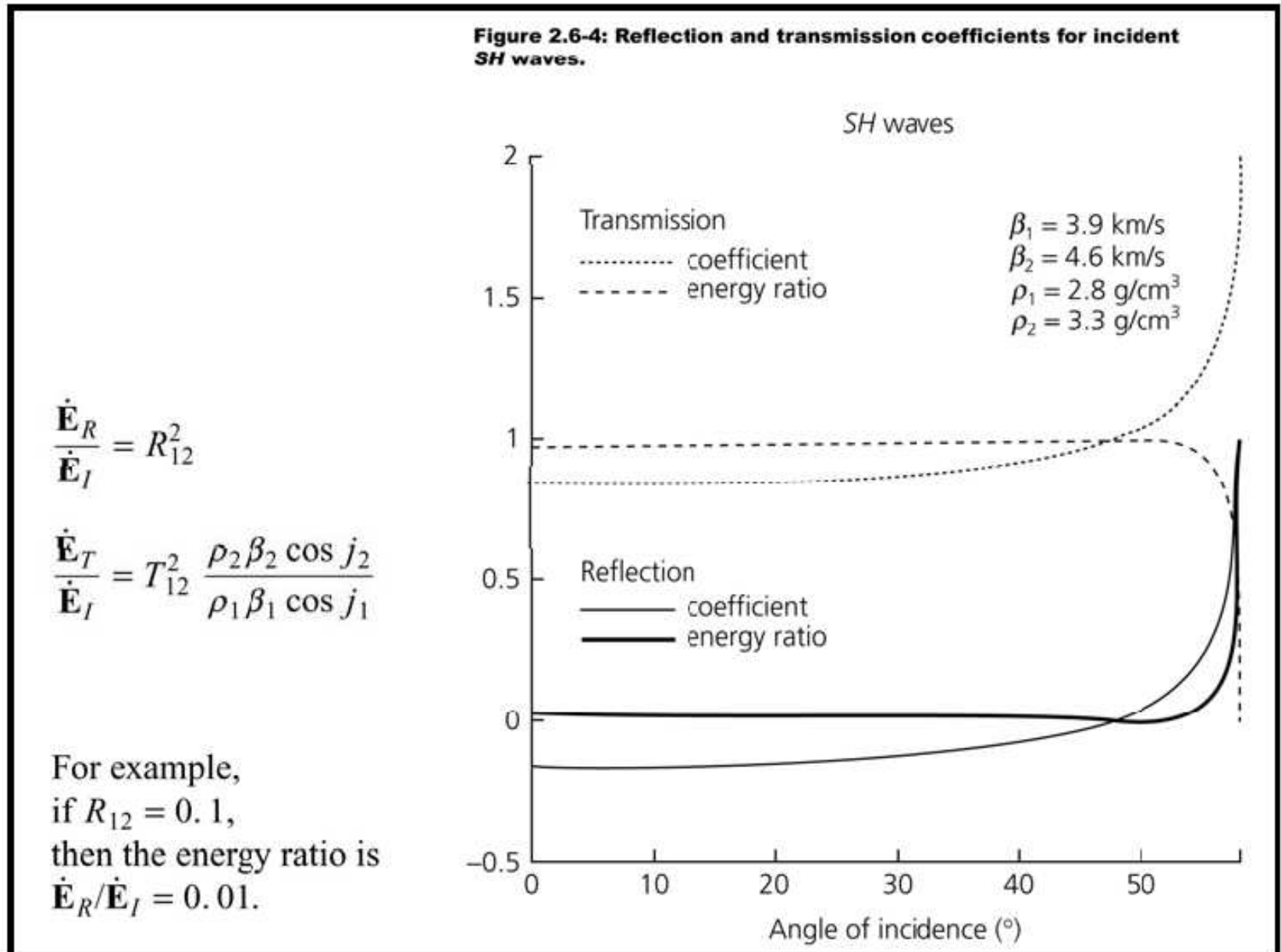
$$\frac{\dot{\mathbf{E}}_R}{\dot{\mathbf{E}}_I} = R_{12}^2 \quad \frac{\dot{\mathbf{E}}_T}{\dot{\mathbf{E}}_I} = T_{12}^2 \frac{\rho_2 \beta_2 \cos j_2}{\rho_1 \beta_1 \cos j_1}$$

Figure 2.6-3: Lengths of incident, reflected, and transmitted wave fronts at a boundary.





# 11.1 SH reflexión y transmisión





# 11.1 SH reflexión y transmisión

- Existe un ángulo crítico que produce una transmisión horizontal  $j_2 = 90$ .
- Este ángulo crítico se define:  $\frac{\beta_1}{\sin j_c} = \beta_2$ .
- Para ángulos de incidencia mayor que el ángulo crítico, es decir cuando  $j_1 > j_c$ ,

$$u_2^{(2)} = B_2 e^{i(k_1 x_1 + k_1 r_{\beta_2} x_3 - \omega t)} \quad (11.11)$$

con  $r_{\beta_2}$  imaginaria.

- En el medio 2, la amplitud de la onda decae exponencialmente con distancia de la interfase. Es decir, es una onda evanescente que es “atrapada” cerca la interfase.



## 11.2 El caso P-SV

La guía contiene más información sobre la interacción P-SV, que sigue los mismos principios.