9 La dispersión de ondas de superficie

- Para una onda dispersiva, el desplazamiento en una cierta posición y tiempo es determinado por la integral sobre todas las frecuencias que contribuyen a la onda.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(kx-\omega t)} dk \tag{9.1}$$

- La amplitud, $A(k)$, varía lentamente en comparación con la fase $\Phi = (kx - \omega t)$. Este implica que el integral solamente contribuye al sismograma cuando $(kx - \omega t)$ es constante.
- Cuando la fase esta estacionaria,

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dk} &= \frac{d}{dk}(kx - \omega t) = x - \frac{d\omega}{dk} t = x - Ut = 0 \\ \Longrightarrow U &\equiv \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} = \frac{x}{t} \end{aligned} \tag{9.2}$$

- U es la velocidad del grupo, corresponde a la frecuencia ω_0, o el número de onda k_0. En un sismograma con posición (x,t), hay contribución al sismograma $u(x,t)$ de una frecuencia ω_0.

9.1 Teoría

- Se puede hacer una expansión de Taylor alrededor de ω_0:

$$kx-\omega t = (k_0x-\omega_0t)+(k-k_0)\frac{d}{dk}[kx-\omega t]_{k=k_0}+\frac{1}{2}(k-k_0)^2\frac{d^2}{dk^2}[kx-\omega t]_{k=k_0}+\ldots \tag{9.3}$$

- En esta expansión,

$$\frac{d}{dk}[kx-\omega t]_{k=k_0} = 0$$

- y

$$\frac{d^2}{dk^2}[kx-\omega t]_{k=k_0} = \frac{d}{dk}[x-Ut]_{k=k_0} = -t\frac{dU}{dk}\bigg|_{k=k_0}$$

- Entonces:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(k_0)e^{i(k_0x-\omega_0t)}\exp\left\{-i\tfrac{1}{2}(k-k_0)^2\tfrac{dU}{dk}t\right\}dk \\ &= A(k_0)e^{i(k_0x-\omega_0t)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-i\tfrac{1}{2}(k-k_0)^2\tfrac{dU}{dk}t\right\}dk \end{aligned} \tag{9.4}$$

Intermezzo

- Se requiere un cambio de variable: $\xi^2 = (1/2)(k-k_0)^2(dU/dk)t$
- Entonces podemos escribir la ecuación (9.4) como:

$$u(x,t) = A(k_0)e^{i(k_0x-\omega_0 t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\xi^2\right\} \frac{dk}{d\xi} d\xi$$

- Y con un poco de manipulación:

$$\begin{aligned}
\frac{d[\xi^2]}{dk} = \quad 2\xi\frac{d\xi}{dk} &= (k-k_0)\frac{dU}{dk}t + \frac{1}{2}(k-k_0)^2\cancelto{0}{\frac{d}{dk}\frac{dU}{dk}t} \\
\frac{d\xi}{dk} &= \frac{(k-k_0)\frac{dU}{dk}t}{2\xi} \\
\frac{d\xi}{dk} &= \frac{(k-k_0)\frac{dU}{dk}t}{2\sqrt{(1/2)(k-k_0)^2(dU/dk)t}} \\
\frac{d\xi}{dk} &= \frac{\sqrt{t}\sqrt{\frac{dU}{dk}}}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

- En esta expresión cabe recordar que $\frac{dU}{dk}$ es una constante en ω_0.

9.1 Teoría

- Entonces la ecuación (9.4) se reduce al

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= A(k_0)e^{i(k_0x-\omega_0t)}\left[\frac{t}{2}\frac{dU}{dk}\right]_{k=k_0}^{-1/2} \cancelto{\sqrt{i\pi}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi^2}\,d\xi} \\
&= A(k_0)e^{i(k_0x-\omega_0t)}\left[\frac{t}{2}\frac{dU}{dk}\right]_{k=k_0}^{-1/2} (i\pi)^{1/2}
\end{aligned}
\tag{9.5}
$$

- Tomando la parte real de la ecuación:

$$
u(x,t) = A(k_0)\left[\frac{2\pi}{(x/U)(dU/dk)}\right]^{1/2} \cos(k_0x - \omega_0t \pm \pi/4) \tag{9.6}
$$

- Para un cierto (x,t), la energía de la onda dispersiva esta contenida en la forma de una oscilación de frecuencia ω_0, que corresponde a $\frac{d}{dk}(kx - \omega t) = 0$.
- La amplitud más grande en el sismograma corresponde al $\frac{dU}{dk} = 0$, y es la fase de Airy. (Para calcular la amplitud de la fase de Airy, es necesario tomar el próximo término en la expansión de Taylor (9.3)).

9.2 Análisis: velocidad de grupo

- **Velocidad de Grupo:** La fase de la onda dispersiva esta dada por

$$\Phi = kx - \omega t + \phi \pm \pi/4 \tag{9.9}$$

- ϕ es la fase original de la onda que es típicamente desconocida.
- Para la velocidad de grupo, se necesita que la fase es estacionaria ($\frac{d\Phi}{dk} = 0$), entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk}(kx - \omega t + \phi \pm \pi/4) &= 0 \\ x - \frac{d\omega}{dk} t + \frac{d\phi}{d\omega}\frac{d\omega}{dk} &= 0 \end{aligned}$$

- Y, recordando que $U = \frac{d\omega}{dk}$,

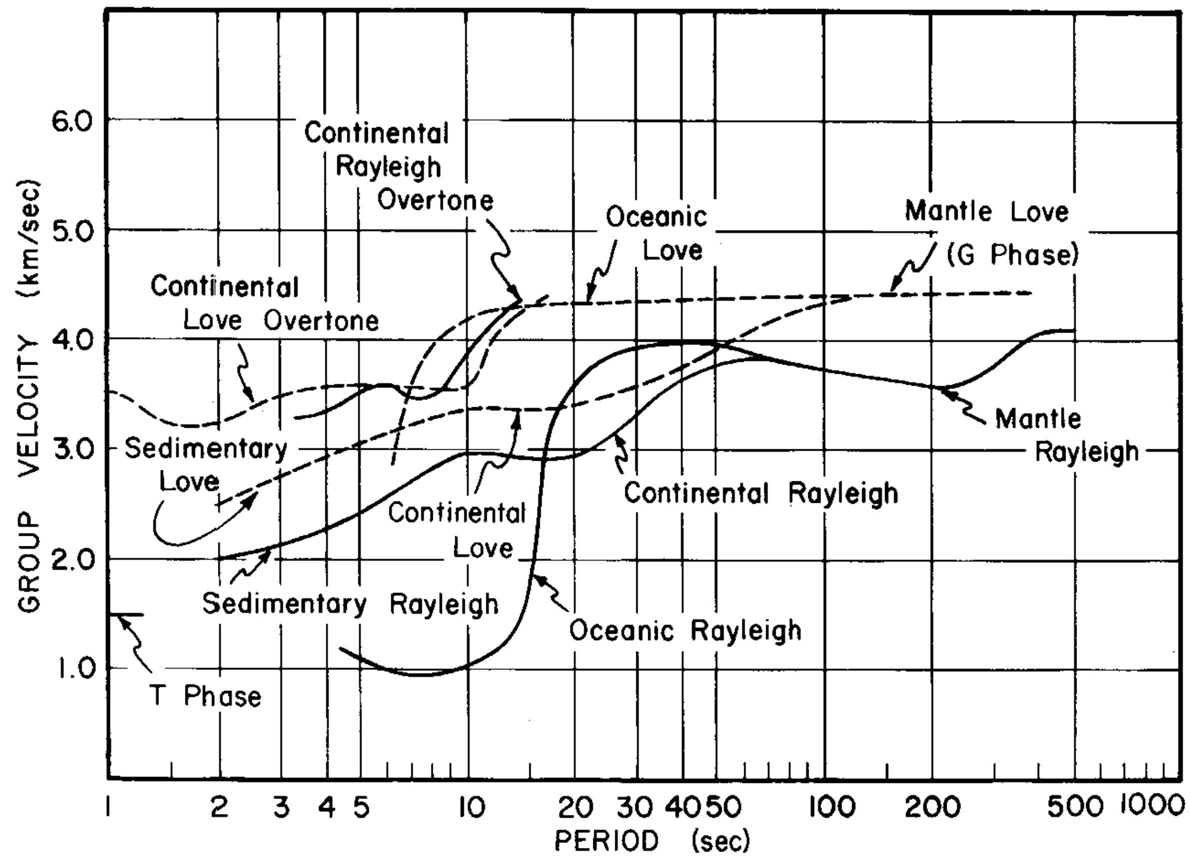
$$U = \frac{x}{t - \frac{d\phi}{d\omega}} \approx \frac{x}{t} \tag{9.10}$$

- En la última ecuación, se supone que la fase introducida por la fuente del terremoto no cambia con la frecuencia angular.

9.2 Análisis: velocidad de grupo

- El método más simple para medir U de un sismograma es medir los tiempos de un periodo de la onda de superficie. Para una llegada a tiempo t_i, el intervalo $t_{i+1} - t_{i-1}$ es una estimación del periodo T de la llegada a t_i. La velocidad del grupo entonces es $U(T) = x/t_i$. La curva de $U(T)$ puede ser modelada para obtener la estructura en promedio de la región donde pasa la onda. Además, varias curvas de $U(T)$ de caminos de propagación que se cruzan dentro de un área pueden ser usadas para tomografía de las ondas de superficie.

9.2 Análisis: velocidad de grupo



- Ejemplos de las curvas de dispersión para unas diferentes regiones de la Tierra.

9.2 Análisis: velocidad de fase

- **Velocidad de Fase:** Para encontrar la expresión para la velocidad de fase para una onda dispersiva a un cierto periodo (es decir, $c(T_0) = \omega_0/k_0 = 2\pi/T_0 k_0$), hay que considerar la propagación de la misma fase. En términos matemáticos, buscamos soluciones para $\Phi = 2N\pi$ y la ecuación (9.9), con esta condición, reduce al:

$$k_0 x - \omega_0 t + \phi \pm \pi/4 = 2N\pi \tag{9.11}$$

- El el siguiente manipulación de la ecuación (9.11) se usa $c(T_0) = \omega_0/k_0$ y $1/k_0 = [c(T_0)T_0]/2\pi$

$$\begin{aligned} x - \frac{\omega_0}{k_0}t + \frac{\phi}{k_0} \pm \frac{\pi}{4}\frac{1}{k_0} &= \frac{2N\pi}{k_0} \\ x - c(T_0)t + \frac{c(T_0)T_0\phi}{2\pi} \pm \frac{\pi}{4}\frac{c(T_0)T_0}{2\pi} &= \frac{2N\pi c(T_0)T_0}{2\pi} \end{aligned}$$

- con el siguiente resultado (donde $\phi^{'} = \phi/2\pi$)

$$c(T_0) = \frac{x}{t - (\phi' - N \pm 1/8)T_0} \tag{9.12}$$

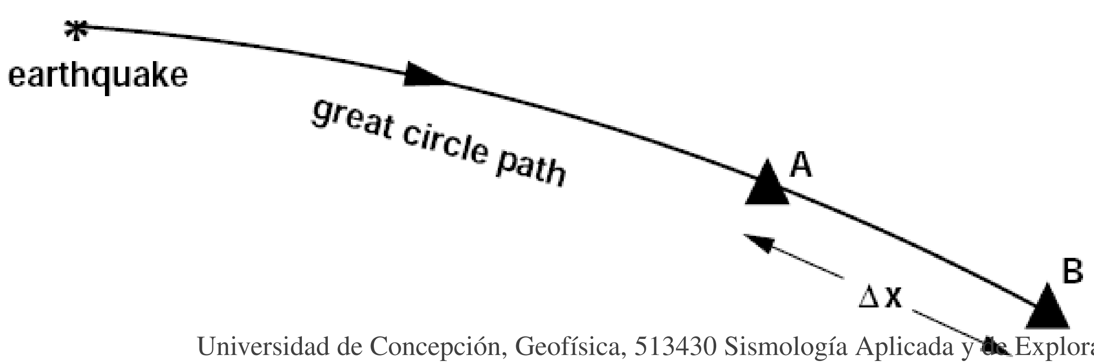
9.2 Análisis: velocidad de fase

- Siempre se usa la propagación de una onda de superficie entre dos estaciones para calcular la velocidad de fase (que existe en el medio entre las dos estaciones).

$$\begin{array}{llcl} \text{(A:)} & k_0 x_A - \omega_0 t_A + \phi_A \pm \pi/4 & = & 2N_A\pi \\ \text{(B:)} & k_0 x_B - \omega_0 t_B + \phi_B \pm \pi/4 & = & 2N_B\pi \end{array}$$

- La fase asociada con la fuente del terremoto es la misma (para el mismo evento), entonces si consideremos la propagación entre las dos estaciones, con $\Delta N = N_B - N_A$ el número de ciclos que separa una fase particular en las dos estaciones,

$$c(T_0) = \frac{\Delta x}{\Delta t + \Delta N T_0} \tag{9.14}$$



9.3 / 9.4 Estudios de casos

- En la guía del curso existen dos estudios de los casos de Hawái y el Pacífico en general. Les ruego revisar estos casos, no les pondré aquí para evitar imprimir las mismas imágenes en color dos veces.