

## Geofísica de la Tierra Sólida 2010 - Certamen 2

2 horas

Importante: Hay que elegir 5 de las 7 preguntas de la sección A, y elegir 2 de las 4 preguntas en la sección B.

La sección A consta de 25 puntos, la sección B de 25.

Sección A [Elige 5 de las 7 preguntas. Todas las preguntas constan de 5 pts (=50% en total)]

A1)

(a) [2 pts] ¿Cuáles son las unidades para las componentes del tensor de estrés,  $\sigma_{ij}$ , y del tensor de tensión,  $\epsilon_{ij}$ ?

*dimensionales*

*F/area N/m<sup>2</sup>*

(b) [3 pts] Para el tensor de estrés:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

¿cuáles son las condiciones para (i) estrés uniaxial y (ii) estrés cortante puro?

*$\sigma_{11} \neq 0, \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$*

*$\sigma_{11} = 0, \sigma_{22} = -\sigma_{33}$*

A2)

(a) [3 pts] ¿Cómo varían las amplitudes de las ondas de (i) cuerpo, y (ii) superficie, con la distancia de un terremoto?

*$E \propto \frac{1}{r^2}, A \propto \frac{1}{r^0}$*

*$E \propto \frac{1}{r^0}, A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$*

(b) [2 pts] Entonces, ¿cómo se sintió el terremoto chileno de 27 de febrero (magnitud 8.8), para gente ubicada en Buenos Aires, Argentina?

*ondas de superficie + 1 hecho - zerrado, manibito...*

A3)

[5 pts] Para las ondas superficiales ¿cual es su dispersión? ¿Por qué ondas de superficie muestran dispersión?

*$v = v(\omega)$  velocidad depende de su frecuencia*

*$\alpha, \beta, \lambda, \mu, \rho$  cambian con profundidad  
ondas de mayor longitud de onda sienten más los efectos de la corteza a profundidades.*

A4)

(a) [3 pts] La velocidad de la onda  $P$  esta dada por

$$\alpha = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (2)$$

donde  $\mu$  y  $\kappa$  son la rigidez y el modulo de volumen respectivamente. ¿Qué representan físicamente  $\mu$  y  $\kappa$ ?  
*resistencia a un cambio en volumen cuando aumenta la presión*  
*resistencia a estrés cortante*

(b) [2 pts] En el manto la densidad,  $\rho$ , generalmente aumenta con profundidad. ¿Por qué aumenta  $\alpha$  también?

*$\mu$  y  $K$  aumentan más rápido*

A5) En prospección se pueden usar ondas  $P$  y  $S$  para investigar la estructura de la corteza.

[5 pts] Si existe una capa de petróleo en la Tierra [baja velocidad de onda  $P$ , casi sin rigidez ( $\mu \approx 0$ )], ¿cómo afectará las curvas de tiempo de viaje para ambas ondas  $P$  y  $S$ ?

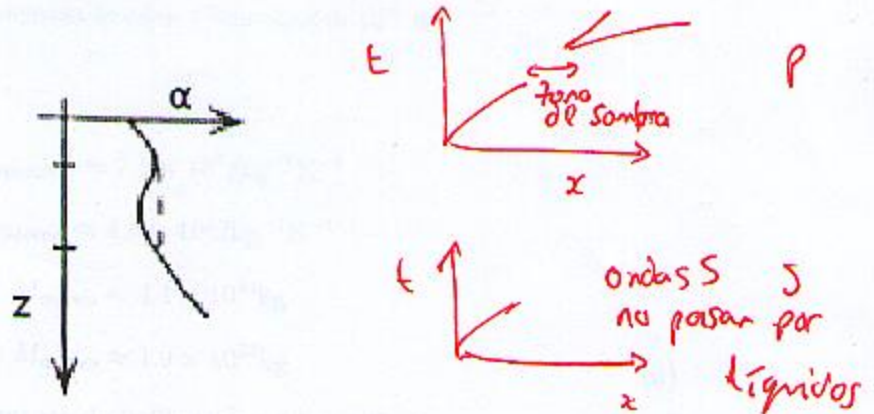


Fig A5: Una zona de baja velocidad en la corteza.  $\alpha$  es la velocidad de la onda  $P$ .

A6)

[5 pts] ¿Qué es la circulación hidrotermal? ¿Qué tipo de transferencia de calor es?

- la circulación de agua por un sistema de fracturas cerca un dorsal
- fumarolas negras
- corteza caliente, justo formada

*convección*

A7) La pérdida de energía de la superficie de la Tierra es  $\sim 4.2 \times 10^{13} \text{W}$ , mientras que la generación de energía dentro de la Tierra es  $\sim 3.2 \times 10^{13} \text{W}$

<b>INCOME</b>	
Crustal radioactivity	8.2
Mantle radioactivity	19.9
Latent heat and gravitational energy released by core evolution	1.2
Gravitational energy of mantle differentiation	0.6
Gravitational energy released by thermal contraction	2.1
<b>TOTAL</b>	<b>32.0</b>
<b>EXPENDITURE</b>	
Crustal heat loss	8.2
Mantle heat loss	30.8
Core heat loss	3.0
<b>TOTAL</b>	<b>42.0</b>
<b>NET LOSS OF HEAT</b>	<b>10.0</b>

Fig A7: Transferencia de calor. Cifras están en  $10^{12} \text{W}$ .

[5 pts] Si

$$C_{P[\text{silicatos}]} \approx 7.1 \times 10^2 \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$C_{P[\text{hierro}]} \approx 4.6 \times 10^2 \text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$M_{\text{manto}} \approx 4.1 \times 10^{24} \text{kg}$$

$$M_{\text{nucleo}} \approx 1.9 \times 10^{24} \text{kg}$$

(3)

Calcule el cambio en la temperatura de la Tierra en  $4.5 \times 10^9$  años.

$$\Delta E = 1 \times 10^{13} \text{ J/s}$$

$$\Delta E = \sum C_p M \Delta T$$

$$\Delta E = (C_{ps} M_m + C_{ph} M_n) \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\Delta E}{C_{ps} M_m + C_{ph} M_n} \left( \frac{\text{K}}{\text{s}} \right) = \frac{1 \times 10^{13}}{2.911 \times 10^{27} + 8.76 \times 10^{26}}$$

$$\Delta T = \frac{1 \times 10^{13}}{3.785 \times 10^{27}} = 2.64 \times 10^{-15} \text{ K/s}$$

$$\times 4.5 \times 10^9 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 = 374 \text{ K}$$

Sección B [Elige 2 de las 4 preguntas, 12.5 pts cada una (=50% en total)]

B1) [12.5 pts]

4 2= 1 2=

(a) [3 pts] Ordenen las fases sísmicas *SKS*, *PKS*, *PKP*, *SKP* según sus tiempos de llegada.

(b) [3 pts] Dibujen (o expliquen que significan) las fases sísmicas *PKiKP*, *PKIKP*, *PKJKP*.



(c) [3.5 pts] Usen los siguientes datos para los tiempos de viaje  $t(\Delta)$ :

$$t(0)_{PKiKP} = 994.6s$$

$$t(180)_{PKIKP} = 1214.5s$$

$$t(180)_{PKJKP} = 1634.0s$$

y el radio del núcleo interno:

$$r_{NI} = 1222km$$

$$V_p = \frac{2r_{NI}}{t_{PKiKP} - t_{PKIKP}} = \frac{2444}{219.9} = 11.1 \text{ km/s} \quad (4)$$

$$V_s = \frac{2r_{NI}}{t_{PKJKP} - t_{PKiKP}} = \frac{2444}{639.4} = 3.8 \text{ km/s} \quad (5)$$

para estimar las velocidades de la onda *P* y la onda *S* (en promedio) en el núcleo interno.

(d) [3 pts] Use sus valores de parte (c) para estimar  $\mu$  y  $\kappa$  en el núcleo interno (de estudios sobre Hierro, su densidad es  $\approx 13.5 \text{ gcm}^{-3}$  en el núcleo interno). Recuerden:

$\kappa: \text{Pa}$   
 $\mu: \text{Pa}$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

(6)

$$\mu = \beta^2 \rho = 1.9 \times 10^{11} \text{ Pa} \left( \frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} \right)$$

$$\kappa = \alpha^2 \rho - \frac{4}{3}\mu = 1.4 \times 10^{12} \text{ Pa}$$

B2) [12.5 pts]

(a) [4 pts] Use la separación de variables para mostrar que la ecuación de movimiento para la onda P:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla^2\phi = \rho \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

tiene solución

$$\phi(x, y, z, t) = \text{cte.} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

donde  $\omega = \alpha|k|$ ,  $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ , y la onda se propaga en la dirección positiva.

$$\phi = \text{cte.} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

(b) [2 pts] El desplazamiento del medio debido a la onda P es  $u = \nabla\phi$ . Muestre que  $u$  está en la misma dirección que la trayectoria de la onda.

$$\vec{u} = \nabla\phi = \left( \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) = (ik_x, ik_y, ik_z) \text{cte.} e^{i(\dots)}$$

(c) [2 pts] Para ondas S,  $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ . ¿En un sólido de Poisson ( $\lambda = \mu$ ) cuál es la tasa entre  $\alpha$  y  $\beta$ ?

$$\alpha = \sqrt{\frac{3\mu}{\rho}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{3}\beta$$

(d) [4.5 pts]

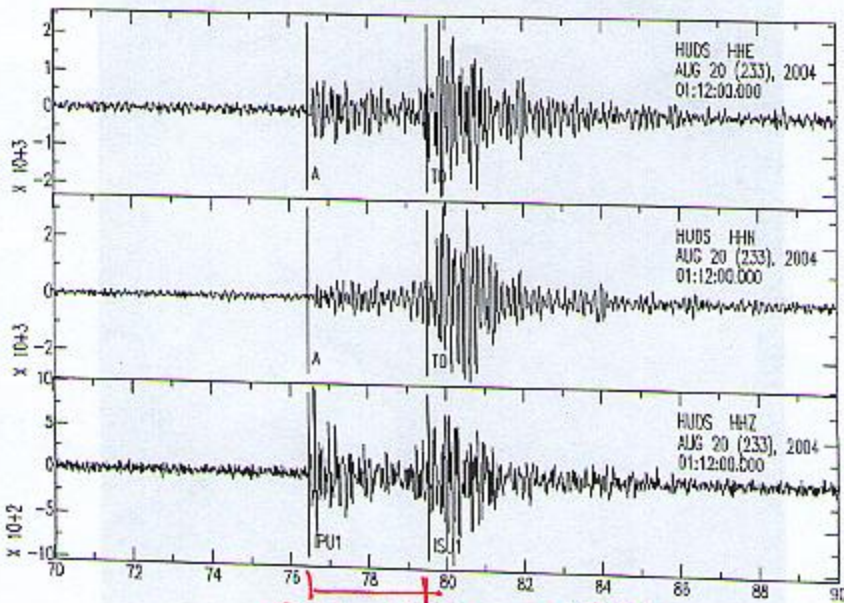


Fig B2: Sismo de volcán Hudson, 2004.

El gráfico muestra un sismo (baja magnitud) del volcán Hudson con las ondas P (IPU1) y S (ISU1) marcadas. La escala de tiempo esta en segundos, y existen tres componentes: este (HHE), norte (HHN) y vertical (HHZ). Si  $\alpha = 6 \text{ km s}^{-1}$  cerca la superficie de la Tierra, y suponiendo que la corteza es un sólido de Poisson, ¿cuál es la distancia entre el sismo y el instrumento?

$$t_\alpha = \frac{x}{\alpha}, \quad t_\beta = \frac{x}{\beta} = \frac{\sqrt{3}x}{\alpha}$$

$$t_\beta - t_\alpha = x \left( \frac{\sqrt{3}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{x}{\alpha} (\sqrt{3} - 1)$$

$$3.1 = \frac{x}{6} (\sqrt{3} - 1) \quad \therefore x = \frac{3.1 \times 6}{\sqrt{3} - 1} = 3.1 \times 8.2 = 25 \text{ km}$$

B3) [12.5 pts]

(a) [3 pts] El desplazamiento debido a las ondas P y S está dada por:

$$u = \nabla\phi + \nabla \times \psi$$

¿Para una onda que se propaga en el plano x-z, cuáles de las componentes  $\phi$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $\psi_z$  están asociadas con las ondas P, SV y SH?

P SV (9) SH

$$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi_y}{\partial z}, \quad u_y = \frac{\partial\psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial x}$$

$$u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_z}{\partial x}$$

(b) [2.5 pts] ¿Por qué hay acoplamiento de las ondas P y SV en una superficie mientras que ondas SH están en su propio sistema?

tracciones / deformación en la superficie en dirección x-z = sistema P-SV  
y = sistema SH

(c) [2 pts] Sismómetros normalmente tienen 3 componentes; 1 vertical y 2 horizontales. Es posible rotar las dos componentes horizontales a radial y transversal. ¿Qué significan las componentes radial y transversal, en relación con la trayectoria del rayo?

radial : a lo largo del rayo  
transverso : perpendicular al rayo.

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \end{pmatrix}$$

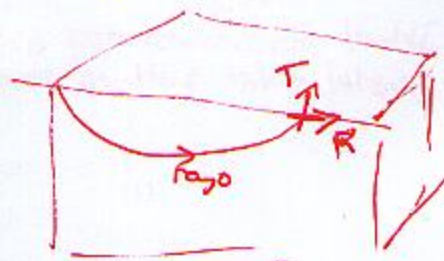
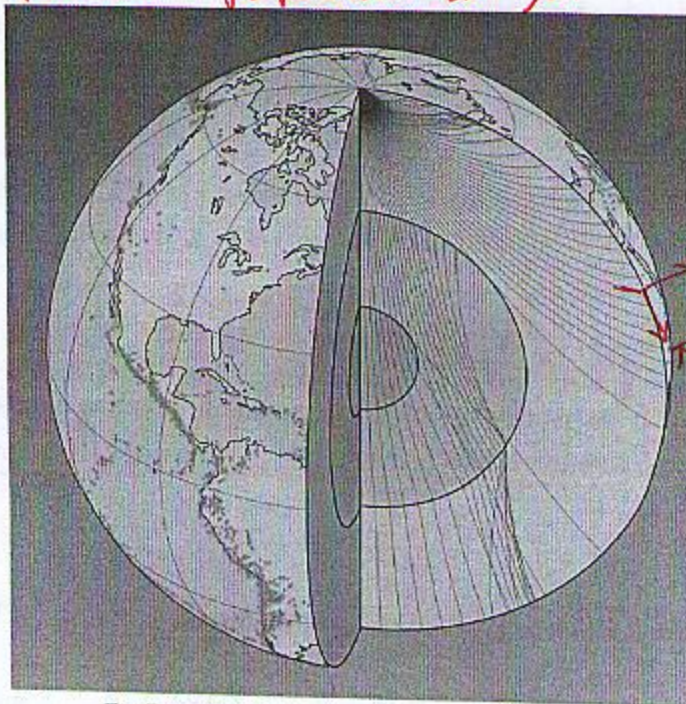


Fig B3: Las trayectorias de rayos por la Tierra.

(d) [3 pts] La fase S de un terremoto puede llegar en la componente transversal (SH), sin embargo la fase SKS no debe llegar en la componente transversal. ¿Por qué?

líquido núcleo externo  
SKS  
S

(e) [2 pts] ¿En qué componente debe llegar la onda Love? ¿Por qué?

guía de ondas SH  
=> componente T.

conversión P -> S  
Solamente SV acopladas con la onda P

B4 [12.5 pts]

(a) [4 pts] De la ecuación de difusión:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (10)$$

el tiempo  $t$  necesario para que calor recorra una distancia  $L$  esta dado por

$$L = \sqrt{\kappa t} \quad (11)$$

con  $\kappa$  la difusividad térmica;  $\kappa \approx 2 \times 10^{-6} \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ . Estime el tiempo para la transferencia de calor a través de:

(i) El lado de una tasa con un espesor de 2 mm.

$$t = \frac{L^2}{\kappa} = \frac{(2 \times 10^{-3})^2}{2 \times 10^{-6}} = 2 \text{ s}$$

(ii) Una capa con un espesor de 6000 km.

$$t = \frac{(6 \times 10^6)^2}{2 \times 10^{-6}} = 1.8 \times 10^{19} \text{ s} = 5.7 \times 10^{11} \text{ años}$$

La (ii) es aproximadamente el tiempo requerido para el enfriamiento de la Tierra solamente por la conducción. ¿Por qué es distinto de la edad de la Tierra?

- Porque la Tierra se enfría por convección también  
 - porque la Tierra todavía ~~tiene~~ contiene calor latente hidrotermal

(b) [8.5 pts] La ecuación de difusión térmica puede ser escrita:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + H \rho \quad (11)$$

donde  $\rho$  es densidad,  $H$  es la producción de calor dentro del volumen por unidad de masa,  $C_p$  es calor específico,  $k$  es la conductividad térmica.

(i) <sup>1.5</sup> ¿Cuál es la geoterma? ~~respuesta~~ respuesta

(ii) <sup>4</sup> Para un planeta con radio  $a$  y una temperatura de superficie de cero, la variación de temperatura con la profundidad, en un estado constante, esta dada por:

$$T(r) = \frac{\rho H (a^2 - r^2)}{6k}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \Rightarrow k \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -H \rho$$

Muestre que  $T(r)$  esta una solución a la ecuación (11) para un planeta esférico. Note que

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{-2r\rho H}{6k}$$

$$r^2 \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{-2r^3 \rho H}{6k}$$

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{6r^2 \rho H}{6k} = \frac{r^2 \rho H}{k}$$

$$\frac{k}{2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\rho H \checkmark$$

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \quad (13)$$

(iii) <sup>2</sup> Usando  $k = 4 \text{W/mK}$ ,  $H = 10^{-10} \text{W/kg}$ ,  $\rho = 5.5 \text{g/cm}^3$ ; encuentre la temperatura en el centro de los planetas con radios de 10km, 100km y 1000km.

$$T = \frac{5500 \times 10^{-10} (a^2 - 0)}{6 \times 4}$$

(iv) <sup>1</sup> ¿Qué tamaño tiene un planeta que está en el limite de estar fundido en su centro (asume que su material empieza a fundirse a  $1000^\circ\text{C}$ )?

2k 219k 72600k  
 ~1300k?

$$= 2.29 \times 10^{-8} a^2$$

$$a = \sqrt{\frac{1300}{2.29 \times 10^{-8}}} = 238 \text{ km}$$

↑  
ESTIMACIÓN