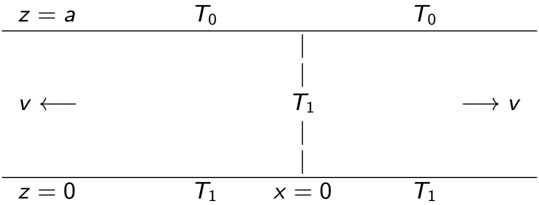
513335 Geofísica de la Tierra Sólida

Presentación 21
Modelo Térmico de una Placa Oceánica
Versión 1.1

Modelo simple de una dorsal



- La placa tiene espesor a.
- En la astenosfera debajo de la placa ($z = 0$) la temperatura es T_1.
- En el océano encima de la placa ($z = a$) la temperatura es T_0.
- En la dorsal en la posición $x = 0$ la temperatura es T_1.
- Existe una discontinuidad en la temperatura en la posición $x = 0, z = a$. ¿Cómo vamos a poder modelar esta discontinuidad?
- Las placas separan de la dorsal a una velocidad v, en la dirección horizontal.

Modelo simple de una dorsal

Empecemos con la ecuación de difusión con la aproximación $A = 0$:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \tag{1}$$

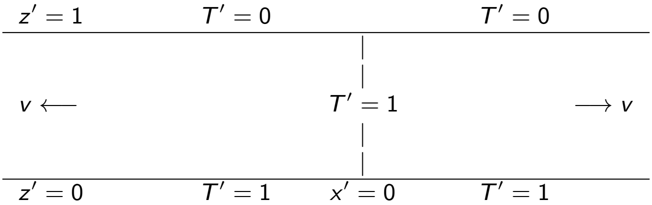
Tenemos que agregar un término que contempla la transferencia de T por el movimiento de la placa:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T \tag{2}$$

En el estado constante ($\partial T / \partial t = 0$), considerando la placa que se mueve en la dirección $+\hat{x}$ (entonces $\bar{v} = (v, 0)$),

$$v \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \tag{3}$$

Cambiar a variables adimensionales



- $z = az'$ se nota que z' ahora es adimensional, y la coordenada z' esta dada en relación al espesor de la placa.
- $x = ax'$
- $T = (T_1 - T_0)T' + T_0$ cuando $T = T_0$, $T' = 0$; y cuando $T = T_1$, $T' = 1$

Pregunta: ¿Cuales son las condiciones de borde de esta sistema?

Manipulación matemática

1. $\partial x/\partial x' = a$, y entonces $\partial x = a\partial x'$
2. $\partial T/\partial T' = (T_1 - T_0)$, y entonces $\partial T = (T_1 - T_0)\partial T'$
3. Y para la segunda derivada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T'}{\partial x'}\right)\frac{(T_1 - T_0)}{a}\\ &= \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial T'}{\partial x'}\right)\frac{(T_1 - T_0)}{a^2}\end{aligned}$$

La mismas relaciones se pueden obtener para la coordenada z'.

Modelo simple de una dorsal

Cambiando la ecuación (3) a variables adimensionales:

$$v \frac{\partial T'}{\partial x'} \frac{(T_1 - T_0)}{a} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} \right) \frac{(T_1 - T_0)}{a^2} \qquad (4)$$

Reorganizando:

$$\left(\frac{va}{\kappa} \right) \frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} \qquad (5)$$

El número adimensional en esa ecuación se llama el número de Peclet:

$$Pe = \left(\frac{va}{\kappa} \right) = \frac{\text{importancia de transferencia de calor por advección}}{\text{importancia de transferencia de calor por difusión}}$$

Solución por separación de variables

La solución para la temperatura dentro de la placa se puede obtener como una función de x' multiplicado por una función de z'

$$T'(x', z') = X'(x')Z'(z') \tag{6}$$

Insertando la ecuación (6) dentro de la ecuación (5), reorganizando, y multiplicando por $\frac{1}{XZ}$:

$$\underbrace{\frac{1}{X'}\left(\frac{d^2X'}{dx'^2} - Pe\frac{dX'}{dx'}\right)}_{=\alpha^2} = \underbrace{\frac{-1}{Z'}\frac{d^2Z'}{dz'^2}}_{=\alpha^2} \tag{7}$$

Ambos lados de la ecuación tienen que estar constante, que en este caso llamaremos α^2. En este caso, el lado derecho de la ecuación entrega la solución para Z':

$$Z' = A\sin(\alpha z') + B\cos(\alpha z') \tag{8}$$

Solución por separación de variables

Para la función $X'(x')$:

$$\frac{d^2X'}{dx'^2} - Pe\frac{dX'}{dx'} - \alpha^2 X' = 0 \tag{9}$$

Probando $X' = e^{\beta x'}$: (Pregunta: ¿No es necesario agregar un constante a este término?)

$$\beta^2 - Pe\beta - \alpha^2 = 0 \tag{10}$$

Que tiene solución

$$\beta = \frac{Pe}{2} - \sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 + \alpha^2} \tag{11}$$

¿Por qué solamente elegimos la parte negativa de la solución cuadrática?

La solución particular

- Es necesario considerar $\alpha = 0$ por separado para asegurar la completitud del conjunto de soluciones.
- La solución general derivada para $\alpha \neq 0$ no captura todos los posibles escenarios, particularmente las soluciones en estado estacionario o triviales que se alinean con las condiciones de borde físicas.
- $\alpha = 0$ describe el escenario físico donde la temperatura varía linealmente con la profundidad pero permanece constante en la dirección horizontal, satisfaciendo las condiciones de borde en los límites de la placa. Este escenario se encuentra a grandes distancias de la dorsal.
- Con $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow X' = 1$.
- Con $\alpha = 0 \Rightarrow \frac{-1}{Z'} \frac{d^2 Z'}{dz'^2} = 0 \Rightarrow Z' = C + Dz'$.
- Para cumplir las condiciones de borde de $T' = (0, 1)$ en $z' = (1, 0)$, entonces tenemos $Z' = 1 - z'$.

La solución general

Entonces, la solución general tiene la forma:

$$T' = \left[A\sin(\alpha z') + B\cos(\alpha z')\right] e^{\beta x'} + 1 - z' \tag{12}$$

- La primera condición de borde dice que la temperatura en la base de la placa es la de la astenosfera, es decir C.B. 1: $T' = 1$ cuando $z' = 0$. Esa implica que $B = 0$ y entonces $T' = [A\sin(\alpha z')]\, e^{\beta x'} + 1 - z'$
- La segunda condición de borde dice que la temperatura en la superficie de la placa es la del océano, es decir C.B. 2: $T' = 0$ cuando $z' = 1$. Esa implica que $\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = n\pi$ con n un numero entero mayor que cero.

Hasta ahora:

$$T' = 1 - z' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\beta_n x'} \sin(n\pi z') \tag{13}$$

con la suma sobre $n = 1, 2, ..., \infty$, A_n constantes, y $\beta_n = \frac{Pe}{2} - \sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 + n^2\pi^2}$.

La solución general

- Existe una tercera condición de borde: la temperatura en la posición de la dorsal es la de la astenosfera, es decir C.B. 3: $T' = 1$ cuando $x' = 0$. Esa implica que $1 = 1 - z' + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi z')$.

Entonces la condición que cumpla la tercera condición de borde es

$$z' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi z') \tag{14}$$

Se ve difícil manipular, pero podemos usar la ortogonalidad de las funciones seno para encontrar las constantes de la solución. Tomamos la ecuación (14) y multiplicamos por $\sin(m\pi z')$, luego integrando entre $z' = -1$ y $z' = 1$:

$$\int_{-1}^{1} z' \sin(m\pi z') dz' = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \underbrace{\int_{-1}^{1} \sin(m\pi z') \sin(n\pi z') dz'}_{\delta_{mn}} \tag{15}$$

Consideramos el lado derecho: Usando esta propiedad de ortogonalidad, la integral solamente esta distinto al cero cuando $n = m$, y entonces la suma sobre todos los n solo entrega un elemento distinto que cero: $A_m \delta_{mm} \equiv A_m$. Y podemos entonces calcular cada A_m!

Intermezzo

Calculamos entonces los A_m usando integración por partes:

$$A_m = \int_{-1}^{1} z' \sin(m\pi z') dz'$$

$u = z'$, $\frac{du}{dz'} = 1$; $\frac{dv}{dz'} = \sin(m\pi z')$, $v = \frac{-\cos(m\pi z')}{m\pi}$. Y la solución por partes será $[uv] - \int v \frac{du}{dz'} dz'$. Entonces:

$$A_m = \left[\frac{-z' \cos(m\pi z')}{m\pi}\right]_{-1}^{1} + \cancelto{0}{\frac{1}{m\pi} \int_{-1}^{1} \cos(m\pi z') dz'}$$

El último término se cancela a cero porque $\sin(\pm m\pi) = 0$ para m entero, y entonces

$$A_m = \left[\frac{(-1)\cos(m\pi)}{m\pi}\right] - \left[\frac{(+1)\cos(-m\pi)}{m\pi}\right] = -2\left[\frac{\cos(m\pi)}{m\pi}\right]$$

El coseno oscilará entre -1 y $+1$ para $m = 1, 2, ...$, entonces

$$A_m = \frac{-2(-1)^m}{m\pi} = \frac{2}{m\pi}(-1)^{(m+1)}$$

La solución general

Entonces, el modelo para la temperatura dentro de la placa oceánica es

$$T' = 1 - z' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(-1)^{(n+1)} e^{\left(\frac{Pe}{2} - \sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 + n^2\pi^2}\right)x'} \sin(n\pi z') \qquad (16)$$

Noten que el término $n = 1$ domina la expansión (especialmente lejos de la dorsal). ¿Por qué?

Podemos hacer una simplificación adicional, tomando en cuenta que $Pe >> 2\pi$ típicamente en esta situación

$$\begin{aligned} \frac{Pe}{2} - \sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 + \pi^2} &= \frac{Pe}{2}\left[1 - \left(1 + \left(\frac{2\pi}{Pe}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &= \frac{Pe}{2}\left[1 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{Pe}\right)^2\right] \\ &= \frac{-\pi^2}{Pe} \end{aligned}$$

La solución general

Entonces, al primer orden

$$T' = 1 - z' + \frac{2}{\pi} e^{\frac{-\pi^2}{Pe} x'} \sin(\pi z') \tag{17}$$

Ponemos las dimensiones de nuevo

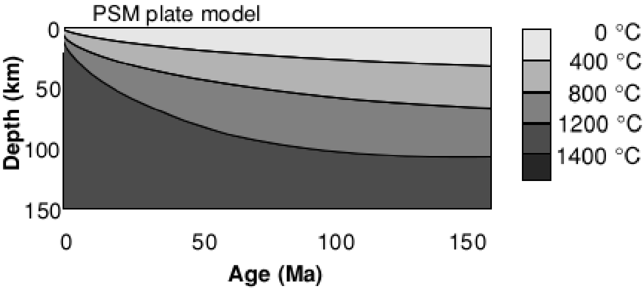
$$T = (T_1 - T_0)\left[1 - \frac{z}{a} + \frac{2}{\pi} e^{\frac{-\pi^2 \kappa}{va^2} x} \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right] + T_0 \tag{18}$$

Cambiamos $x = vt$, con t representando la edad de la placa. También, introducimos $\tau_0 = \frac{a^2}{\pi^2 \kappa}$, representando tiempo de difusión a través de la placa

$$T = (T_1 - T_0)\left[1 - \frac{z}{a} + \frac{2}{\pi} e^{\frac{-t}{\tau_0}} \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\right] + T_0 \tag{19}$$

Y podemos ver que el modelo para temperatura tiene una variación vertical, y una variación con la edad de la placa. La estructura de temperatura de la placa como una función de su edad es independiente de su velocidad v.¿Qué es la distribución de temperatura para una placa oceánica muy vieja?

La solución general



(Fuente: Fowler. El modelo calculado)

El modelo está bastante representativo de la situación de una placa oceánica. Cerca de la dorsal, el modelo pierde precisión. ¿Por qué?

Flujo de calor oceánica

$$|\bar{q}| \approx -k \left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=a} = \frac{k(T_1 - T_0)}{a}\left[1 + 2e^{\frac{-t}{\tau_0}}\right] \qquad (20)$$

Parsons and Sclater: Ocean Floor Bathymetry and Heat Flow

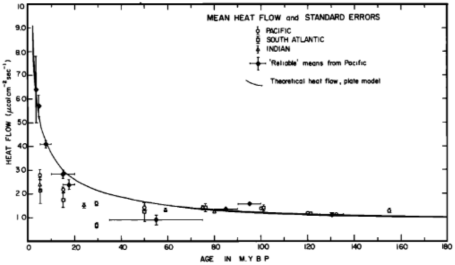
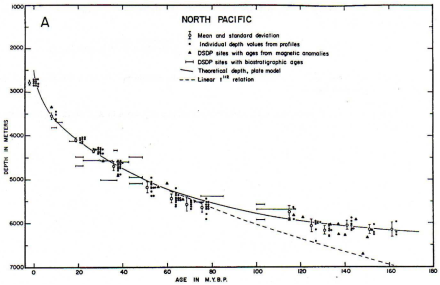


Fig. 10. Standard heat flow averages plus the more selective means of Sclater et al. [1976] plotted as a function of age. The theoretical curve is calculated using the parameters (19) estimated in the text.

(Fuente: Parsons, B. and J.G. Sclater (1977) An analysis of the variation of ocean floor bathymetry and heat flow with age. J. Geophys. Res. 82, 803-827.)

Batimetría oceánica

- Más lejos de la dorsal implica menor temperatura que implica mayor densidad.
- Se puede estimar la densidad usando T y argumentos de expansión térmica del material, luego calcular la profundidad del océano por la isostasia de Pratt. (Más información en los apuntes del curso).

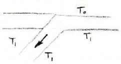


(Fuente: Parsons, B. and J.G. Sclater (1977) An analysis of the variation of ocean floor bathymetry and heat flow with age. J. Geophys. Res. 82, 803-827.)

Lectura adicional

- Apuntes del curso, Capítulo 5. Sección 5.3

Preguntas prácticas



1. Muestre que la distribución de la temperatura en una placa oceánica *muy vieja* cuando subduce en el manto es (en unidades sin dimensión):

$$T' = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} e^{\left((Pe/2)-\sqrt{(Pe/2)^2+n^2\pi^2}\right)x'} \sin(n\pi z')$$

2. ¿Por qué el término $n = 1$ domina? En este caso, encuentre una aproximación para la solución cuando $Pe >> 2\pi$.