513335 Geofísica de la Tierra Sólida

Presentación C
Ondas Planas
Versión 1.3

La ecuación de ondas sísmicas - solución sinusoidal

La ecuación de ondas sísmicas se escribe

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

donde ϕ, una función que cumpla con esta ecuación, tiene una solución 1 dimensional de:

$$\phi = A\sin(kx - \omega t + f) \tag{2}$$

En una posición x fijo se mide una oscilación en el tiempo. A un tiempo fijo el desplazamiento del medio tiene la forma de una oscilación en la distancia. f es la fase inicial de la oscilación (la fase que tiene la oscilación en $x = 0$, $t = 0$).

Un requisito que la función ϕ sea una solución a la ecuación (1) es:

$$-k^2\phi - \frac{1}{\alpha^2}(-\omega^2)\phi = 0$$

$$k^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\omega}{k} \tag{3}$$

La ecuación de ondas sísmicas - solución exponencial

También, podemos escribir la solución a la ecuación (1) usando el número imaginario $i = \sqrt{-1}$ como

$$\phi = A' e^{i(kx-\omega t)} \equiv (A_1 + iA_2)[\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)] \qquad (4)$$

En la ecuación (4) hemos usado la expresión $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.

Aquí, A' es un numero imaginario, contiene la información acerca de la amplitud de la oscilación y su fase. Para definir la oscilación en el mundo real, se toma la parte real de la ecuación (4)

$$\Re\{\phi\} = A_1 \cos(kx - \omega t) - A_2 \sin(kx - \omega t) \qquad (5)$$

Nuevamente, para que $\phi = A' e^{i(kx-\omega t)}$ sea una solución a la ecuación (1), necesitamos la relación $\alpha = \omega/k$.

Vamos a mostrar el significado de α y k después, pero creo que en este curso esta dado que si graficamos una oscilación $\sin(-\omega t)$ en una posición x fijo, ω representa la frecuencia angular que es relacionada con la frecuencia *freq* y el periodo T de la oscilación como $\omega = 2\pi freq = \frac{2\pi}{T}$.

La equivalencia entre la solución sinusoidal y la solución exponencial

Para mostrar la equivalencia entre las dos posibles maneras de escribir oscilaciones (2) y (5) podemos compararles (en esta manipulación usaremos la relación $\sin(X+Y) = \sin X \cos Y + \cos X \sin Y$):

$$
\begin{aligned}
(2) &\equiv (5) \\
A\sin(kx-\omega t+f) &\equiv A_1\cos(kx-\omega t) - A_2\sin(kx-\omega t) \\
A\sin(kx-\omega t)\cos(f) + A\cos(kx-\omega t)\sin(f) &\equiv A_1\cos(kx-\omega t) - A_2\sin(kx-\omega t)
\end{aligned}
$$

Entonces $A\sin(f) = A_1$, $A\cos(f) = -A_2$ y podemos encontrar dos relaciones:

$$
\begin{aligned}
A_1^2 + A_2^2 &= A^2 \cancelto{1}{\left(\sin^2(f) + \cos^2(f)\right)} \\
-\frac{A_1}{A_2} &= \tan(f)
\end{aligned}
$$

Hasta ahora, hemos mostrado soluciones que representan oscilaciones a un solo frecuencia ω. Pero en la realidad, un sismograma es una mezcla de muchas diferentes frecuencias. ¿Cómo proceder?

Ondas planas en 3D

La solución tres dimensional a la ecuación de ondas sísmicas esta dada por la separación de variables, con

$$\phi = A' e^{i(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t)} \tag{6}$$

En esta solución, la relación necesaria entre ω, α y $\bar{k}$ es

$$\omega = \alpha \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \alpha |\bar{k}| \tag{7}$$

Un sismograma es una mezcla de todas frecuencias, entonces la solución general es una integración sobre todos posibles frecuencias.

$$\phi = \int_0^\infty A'(\omega) e^{i(\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t)} d\omega \tag{8}$$

Aquí la función compleja $A'(\omega)$ determina la amplitud y la fase de la contribución al sismograma de la oscilación con frecuencia ω.

Ondas planas en 3D

En ecuación (8) diferentes oscilaciones periódicas, con diferentes frecuencias, amplitudes, y fases, están sumadas para generar una función general.

$$\int_0^{\infty} A'(\omega) e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x}-\omega t)} d\omega = fn(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \tag{9}$$

Esta función general (fn) representa la traza de un sismograma en un cierto punto fijo, por ejemplo, y es una función de la combinación $(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)$

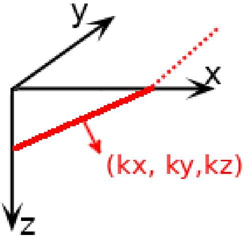
La función es constante, para un cierto t, cuando

$$k_x x + k_y y + k_z z = cte. \tag{10}$$

Esta es la ecuación de un plano con vector normal (k_x, k_y, k_z).

Los planos representados por la solución a la ecuación de ondas sísmicas representan superficies en las cuales las propiedades de la onda sísmica (amplitud, fase) están las mismas.

Ondas planas en 3D



Ahora, vamos a calcular la posición del mismo plano en un tiempo mas, $t + dt$. El plano se mueve por una distancia $\bar{dx} = (dx, dy, dz)$, tal que

$$k_x(x + dx) + k_y(y + dy) + k_z(z + dz) - \omega(t + dt) = k_x x + k_y y + k_z z - \omega t \quad (11)$$

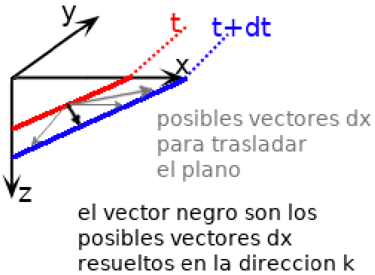
Varios términos en la ecuación (11) se cancelan, llegamos a

$$k_x dx + k_y dy + k_z dz - \omega dt = 0 \quad (12)$$

o

$$(\bar{k} \cdot \bar{dx}) - \omega dt = |\bar{k}||\bar{dx}| \cos\theta - \omega t = 0 \quad (13)$$

Ondas planas en 3D



Desde la ecuación (13), podemos ver que el vector que separa los dos planos tiene un largo de $|\bar{d}x|\cos\theta$ donde el angulo θ es el angulo entre los vectores $\bar{k}$ y $\bar{d}x$. Esta distancia es la distancia perpendicular entre los dos planos: $|\bar{d}x|\cos\theta \equiv |\bar{d}x_\perp|$. Y podemos decir que la onda se propaga en esta dirección, es decir en la dirección $\bar{k}$.Cabe mencionar aquí que cuando dibujamos ondas planas como rayos propagando en el medio, estamos dibujando los rayos a lo largo del vector de onda $\bar{k}$.

Ondas planas en 3D

Entonces, para la propagación de una onda plana en la dirección $\bar{k}$ o $\bar{d}x_{\perp}$, tenemos la siguiente relación:

$$|\bar{k}||\bar{d}x_{\perp}| - \omega dt = 0 \tag{14}$$

Reorganizando,

$$\omega = \frac{|\bar{d}x_{\perp}|}{dt}\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \tag{15}$$

$|\bar{d}x_{\perp}|/dt$ representa la distancia viajado por el plano en el tiempo dt, entonces es la velocidad de propagación de la onda. Comparando las ecuaciones (15) y (7), podemos ver que $\alpha = |\bar{d}x_{\perp}|/dt$.

Entonces, en la ecuación (1) de esta presentación, la ecuación de ondas sísmicas, tenemos la confirmación que α es la velocidad de la onda.

Lectura adicional

- Apuntes sobre Ondas Planas [I. Pozo]