513335 Geofísica de la Tierra Sólida

Presentación 16
Descomposición Helmholtz y Ondas P, SV y SH
Versión 1.1

La descomposición Helmholtz

Empecemos con la ecuación de movimiento

$$\rho\ddot{\bar{u}} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \bar{u}) \quad (1)$$

La descomposición Helmholtz dice que es posible escribir el campo de desplazamiento, $\bar{u}$, como el gradiente de un campo escalar, ϕ, más el rotor de un campo vectorial sin divergencia , $\bar{\psi}$.

$$\bar{u} = \nabla\phi + \underbrace{\nabla \times \bar{\psi}}_{\nabla\cdot\bar{\psi}=0} \quad (2)$$

- $\Rightarrow \nabla \cdot \bar{u} = \nabla^2\phi$
- $\Rightarrow \nabla \times \bar{u} = \nabla \times (\nabla \times \bar{\psi}) = \nabla(\nabla \cdot \bar{\psi}) - \nabla^2\bar{\psi} = -\nabla^2\bar{\psi}$

La descomposición Helmholtz

Entonces la ecuación de movimiento se convierte en

$$\rho\nabla\ddot{\phi} + \rho(\nabla \times \ddot{\bar{\psi}}) = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla^2\phi) + \mu(\nabla \times (\nabla^2\bar{\psi})) \tag{3}$$

Después de una cierta manipulación (Fowler, Anexo 2), salen dos* ecuaciones para ϕ y $\bar{\psi}$ que deberían estar resueltas simultáneamente en todos $\bar{x}$ y t:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

$$\nabla^2\bar{\psi} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

Recuerden que $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa+\frac{4}{3}\mu}{\rho}}$ y $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$.

En conclusión, el desplazamiento de la Tierra puede estar representado por $\bar{u} = \nabla\phi + \nabla \times \bar{\psi}$, donde ϕ representa la onda P, y $\bar{\psi}$ representa la onda S.

*En la realidad, son 4 ecuaciones, ¿por qué?

Ondas planas

Las soluciones a la ecuación de movimiento puede estar representadas por ondas planas, por ejemplo, para la onda P

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0 \tag{6}$$

buscamos una solución por la separación de variables, probando $\phi(\bar{x}, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$ y multiplicando por $1/XYZT$

$$\underbrace{\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}}_{-k_y^2} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}_{-k_z^2} - \frac{1}{\alpha^2}\underbrace{\frac{1}{T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}}_{-\omega 2} = 0 \tag{7}$$

Cada término en la ecuación (7) tiene que estar constante, soluciones para X, Y y Z tiene la forma

$$X = \text{cte.}e^{\pm ik_x x} \tag{8}$$

y para la función de tiempo

$$T = \text{cte.}e^{\pm i\omega t} \tag{9}$$

Noten que en estas ecuaciones, $i \equiv \sqrt{-1}$.

Ondas planas

La solución general para el potencial de la onda P, ϕ, es

$$\phi = \text{cte}.e^{i(\pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z \pm \omega t)} \tag{10}$$

La constante en la ecuación (10) es un número complejo, y la relación entre k_x, k_y, k_z y ω esta dada por la ecuación (7):

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{\alpha^2} = 0 \tag{11}$$

Entonces $\omega = \alpha\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \alpha|\bar{k}|$

Para una onda P propagándose en la dirección $\bar{k} = (k_x, k_y, k_z)$ mientras que el tiempo, t, avanza,

$$\phi = \text{cte}.e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} = \text{cte}.e^{i(\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t)} \tag{12}$$

Para la onda S, las soluciones para ψ_x, ψ_y y ψ_z tienen formas similares, pero con $\omega = \beta|\bar{k}|$

Ondas planas - longitud de onda

Consideremos una onda viajando en la dirección $\hat{x}$, para simplicidad

$$\phi = \text{cte}.e^{i(k_x x - \omega t)} \tag{13}$$

La definición de la longitud de onda es que las propiedades de la onda (amplitud, phase) no cambian si cambiamos la posición x por una cantidad entera de longitudes de onda Λ. En términos matemáticos, ϕ tiene que estar lo mismo para la posición x y la posición $x + N\Lambda$ con N un número entero:

$$\begin{aligned} \text{cte}.e^{i(k_x x - \omega t)} &= \text{cte}.e^{i(k_x(x+N\Lambda) - \omega t)} \\ \text{cte}.e^{i(k_x x - \omega t)} &= \text{cte}.e^{i(k_x x - \omega t)} e^{i(k_x N\Lambda)} \end{aligned} \tag{14}$$

La única manera de cumplir la relación (14) es cuando $e^{i(k_x N\Lambda)} = 1$, que significa $k_x\Lambda = 2\pi$ y la longitud de onda es $\Lambda = \frac{k_x}{2\pi}$. En términos generales

$$\Lambda = \frac{|\bar{k}|}{2\pi} \tag{15}$$

Demuestre que $e^{i2\pi N} = 1$.

Ondas planas - otras propiedades

Para la velocidad de propagación de la onda, tenemos que considerar cómo se propaga la parte de la misma fase de la onda. Entonces $\bar{k} \cdot \bar{x} - \omega t$ tiene que estar constante mientras que la onda se propaga en la dirección $\bar{k}$:

$$\begin{aligned} \underbrace{\bar{k} \cdot \bar{x}}_{\bar{k} \| \bar{x}} - \underbrace{\omega}_{\omega = \alpha |\bar{k}|} t &= \text{cte.} \\ |\bar{k}||\bar{x}| - \alpha |\bar{k}| t &= \text{cte.} \\ |\bar{x}| &= \text{cte.} + \alpha t \end{aligned} \tag{16}$$

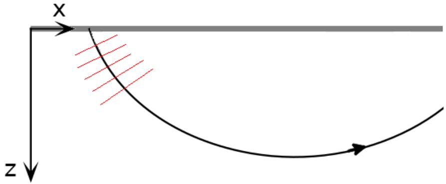
Viendo la ecuación (16) podemos ver que α es la velocidad de propagación del potencial ϕ.

Relaciones entre algunas propiedades son:

- $\Lambda = 2\pi / |\bar{k}| = 2\pi\alpha/\omega = \alpha T$
- $1/T = f = \omega/2\pi = \alpha|\bar{k}|/|\bar{k}|\Lambda = \alpha/\Lambda$

Ondas P, SV y SH

Para una Tierra simple, se puede definir el sistema de coordenadas para que la onda se propaga en el plano $x - z$. El rayo se puede dibujar perpendicular a los frentes de onda.



Para una onda propagándose en el plano $x - z$, los frentes de onda no se cambian en la dirección y. Es decir, si estamos a una cierta posición a un cierto tiempo, cambiando su posición en la dirección y no va a cambiar ni la amplitud ni la fase de la onda. Matemáticamente, los potenciales no se cambian en la dirección y que significa

$$\frac{\partial}{\partial y}(\phi) = \frac{\partial}{\partial y}(\psi_x) = \frac{\partial}{\partial y}(\psi_y) = \frac{\partial}{\partial y}(\psi_z) = 0 \tag{17}$$

Ondas P, SV y SH

Entonces, cuando estamos viendo los desplazamientos de las ondas, con $\bar{u} = \nabla\phi + \nabla \times \bar{\psi}$, para propagación en el plano $x - z$

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, 0, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \tag{18}$$

$$\nabla \times \bar{\psi} = \left(\frac{-\partial\psi_y}{\partial z}, \frac{\partial\psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial x}, \frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right) \tag{19}$$

Y el desplazamiento del medio en tres dimensiones es

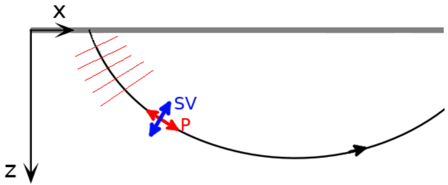
$$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi_y}{\partial z} \tag{20}$$

$$u_y = \frac{\partial\psi_x}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial x} \tag{21}$$

$$u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_y}{\partial x} \tag{22}$$

Ondas P, SV y SH

- El potencial ϕ, viajando a una velocidad α, representa la onda P que causa un movimiento del medio (oscilación) en el plano del rayo.
- El potencial ψ_y, viajando a una velocidad β, representa la onda SV que causa una oscilación del medio en el plano del rayo.
- Los potenciales ψ_x y ψ_z, viajando a una velocidad β, representan la onda SH que causa una oscilación horizontal en la dirección perpendicular al plano del rayo.



En la figura la dirección del movimiento asociado con la onda *SH* esta perpendicular al plano $x - z$.

Lectura adicional

- Apuntes del curso, Capítulo 4. Secciones 4.6 a 4.10.
- Fowler, The Solid Earth, 2° Ed. Anexo 2 "Theory of elasticity and elastic waves".

Preguntas prácticas

1. La onda S es más complicada que la onda P (la onda S es asociada con un campo vectorial, mientras que la onda P está asociada con un campo escalar). ¿Por qué?

2. ¿Qué unidades tienen Φ y $\boldsymbol{\Psi}$?