Universidad de Concepción

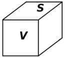
513335 Geofísica de la Tierra Sólida

Presentación 15
Ondas P y S
Versión 1.1

La ecuación de movimiento en tres dimensiones

Para un cierto volumen de la Tierra, V, encerrado por un área, S, podemos escribir la segunda ley de Newton en tres dimensiones:

$$\sum \bar{F} = m\bar{a} \tag{1}$$

Podría estar cualquier volumen, pero ayuda pensar en un cubo: 

Las fuerzas que actúan sobre el volumen son:

- Fuerzas de volumen $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)$. Por ejemplo, el movimiento vertical de la masa en un campo gravitacional, y la interacción de un medio con conductividad con el campo magnético de la Tierra.
- Las fuerzas de superficie $\bar{T} = (T_1, T_2, T_3)$, las tracciones. Por ejemplo, los esfuerzos aplicados a la superficie por los elementos de volumen adyacentes.

Recuerden que las fuerzas en la ecuación (1) representan las fuerzas que desvían desde las fuerzas del punto en equilibrio.

La ecuación de movimiento en tres dimensiones

Escribiendo la fuerza de la ecuación (1) en sus partes de fuerzas de volumen y fuerzas de superficie:

$$\int_V f_i dV + \oint_s T_i dS = ma_i \tag{2}$$

Noten que aquí estoy usando la notación de Einstein, en unas diapositivas mas vamos a poder volver a notación vectorial. En la ecuación (2), i es 1, 2, 3 entonces tenemos un sistema de tres ecuaciones en el medio 3D.

Escribimos las tracciones en las superficies como la suma de los tres elementos del tensor de esfuerzo que actúan sobre la superficie (presentación 14, ecuación (8)):

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \equiv \sigma_{ij} n_j \tag{3}$$

Entonces, usando el hecho que en la sismología el tensor del esfuerzo es simétrico,

$$\int_V f_i dV + \oint_s \sigma_{ij} n_j dS = ma_i \tag{4}$$

La ecuación de movimiento en tres dimensiones

En este punto, queremos aplicar la ley de divergencia de Gauss:

$$\oint_S (\bar{A} \cdot \bar{n}) dS \equiv \int_V (\nabla \cdot \bar{A}) dV$$

En el caso de la ecuación (4), el vector $\bar{A}$ se representa por $\bar{A} = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$, y

$$\oint_s \sigma_{ij} n_j dS \equiv \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV \left(\equiv \int_V \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} dV \right)$$

También, queremos usar el hecho que la masa del volumen es el integral de su densidad sobre este volumen, y que su aceleración es la segunda derivada temporal de su desplazamiento:

$$ma_i = \int_V \rho a_i dV = \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{dt^2} dV$$

Entonces,

$$\int_V f_i dV + \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{dt^2} dV \qquad (5)$$

La ecuación de movimiento en tres dimensiones

La ecuación (5) se cumpla por cualquier volumen V, entonces podemos aplicarla a un elemento de volumen infinitesimal del medio de tal forma que

$$f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{dt^2} \tag{6}$$

La ecuación (6) es la ecuación de movimiento para un medio continuo y es la ecuación fundamental en que se basa la teoría de la sismología. Suponemos que las variaciones espaciales de los esfuerzos en el medio están mucho mayores que las fuerzas de volumen,

$$\left| \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right| \gg |f_i|$$

Esta aproximación esta válida en la sismología para ondas con frecuencias mayores al 0.003 Hz. Las fuerzas restauradoras de las oscilaciones están suficientemente fuertes que podemos ignorar las fuerzas adicionales de un movimiento de masa en un campo gravitacional. 0.003 Hz corresponde a un periodo de unos 300 segundos para la oscilación. Si tenemos oscilaciones de la Tierra con periodos mayores al eso, ¿corresponden a qué subdisciplina de la Geofísica?

La ecuación de movimiento en tres dimensiones

Con la suposición que podemos ignorar las fuerzas de volumen cuando estamos considerando oscilaciones de la Tierra con una frecuencia mayor al 0.003 Hz, la ecuación (6) se reduce a

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{dt^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{7}$$

En términos vectoriales, se podría escribir este sistema de tres ecuaciones como

$$\rho \ddot{\bar{u}} = \nabla \cdot \bar{\sigma} \tag{8}$$

Tenemos tres ecuaciones, pero siete incognitas $(\rho, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{33})$. Entonces para poder avanzar debemos considerar la relación entre el esfuerzo y la deformación para el medio de la Tierra.

La relación entre esfuerzo y deformación

Para poder escribir la relación entre el esfuerzo, σ_{ij}, y la deformación, ϵ_{kl}, debemos usar un tensor de 4° orden con $3^4 = 81$ elementos:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl} \tag{9}$$

La ecuación (9) es un sistema de 9 ecuaciones, por ejemplo la primera, en su forma larga,

$$\begin{aligned}\sigma_{11} = {} & c_{1111}\epsilon_{11} + c_{1112}\epsilon_{12} + c_{1113}\epsilon_{13} \\ & + c_{1121}\epsilon_{21} + c_{1122}\epsilon_{22} + c_{1123}\epsilon_{23} \\ & + c_{1131}\epsilon_{31} + c_{1132}\epsilon_{32} + c_{1133}\epsilon_{33}\end{aligned}$$

Existen ciertas simetrías en este tensor:

- $\sigma_{ij} \equiv \sigma_{ji}$, $\epsilon_{kl} \equiv \epsilon_{kl}$ que implica $c_{ijkl} \equiv c_{jikl} \equiv c_{ijlk} \equiv c_{jilk}$
- también, $c_{ijlk} \equiv c_{klij}$ (no mostrado explícitamente en este curso)

En este caso, el tensor contiene 21 elementos independientes, demasiadas para resolver un sistema de tres ecuaciones.

La relación entre esfuerzo y deformación

En el caso más simple, un medio elástico, isótropo, homogéneo,

$$c_{ijlk} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{10}$$

En esta ecuación, $\delta_{??}$ son la delta de Kronecker y λ, μ son parámetros elásticos de la Tierra, los parámetros de Lamé.

- Definen las palabras elástico, isótropo, homogéneo.
- ¿La Tierra se puede considerar elástica?
- ¿La Tierra se puede considerar isótropa?
- ¿La Tierra se puede considerar homogénea?

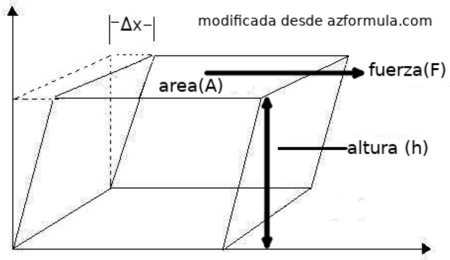
Ahora, para nuestro sistema de tres ecuaciones, tenemos tres incognitas (ρ, λ, μ) y vamos a poder encontrar una solución a la ecuación de movimiento.

Los parámetros elásticos de la Tierra

λ y μ son los parámetros de Lamé en la relación entre el esfuerzo y la deformación.

- μ es el modulo cortante o la rigidez del medio.

$$\mu = \frac{\text{Presión cortante}}{\text{Deformación cortante}} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta x}{h}} \quad [\text{Pa}] \tag{11}$$

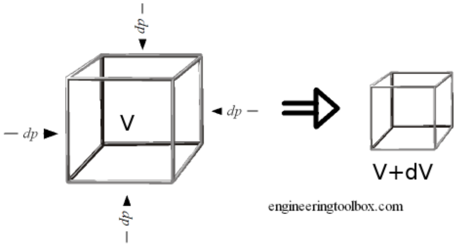


Los parámetros elásticos de la Tierra

λ y μ son los parámetros de Lamé en la relación entre el esfuerzo y la deformación.

- λ no tiene equivalencia física.
- Pero $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ es el modulo de volumen o la incompresibilidad del medio.

$$\kappa = \frac{\text{Presión normal}}{\text{Cambio fraccionario en el volumen}} = \frac{-dP}{\frac{dV}{V}} \quad [\text{Pa}] \qquad (12)$$



La ecuación de ondas sísmicas

Volvemos a la ecuación de movimiento (8), usando la relación entre el esfuerzo y la deformación (10), y además la definición de la deformación en términos del desplazamiento del medio $\epsilon_{kl} = \partial u_l / \partial x_k \equiv \partial u_k / \partial x_l$

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_i}{dt^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \\
&= c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon_{kl}) = c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \\
&= (\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \\
&= \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \\
&= (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} \qquad (13)
\end{aligned}$$

La ecuación de ondas sísmicas

En la ecuación (13), $\frac{\partial}{\partial x_i}$ representa el gradiente; $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial x_1}{dx_1} + \frac{\partial x_2}{dx_2} + \frac{\partial x_3}{dx_3}$ representa la divergencia; y $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_l^2} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2}$ representa el operador Laplaciano vectorial.

Entonces podemos escribir la ecuación (13) en notación vectorial:

$$\rho \ddot{\bar{u}} = (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}) + \mu \nabla^2 \bar{u} \tag{14}$$

Recuerden que el operador Laplaciano vectorial cumpla la identidad:

$$\nabla^2 \bar{u} = \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{u})$$

Entonces podemos escribir la ecuación (14) así:

$$\rho \ddot{\bar{u}} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) \tag{15}$$

La ecuación (15) describe cómo comporta el desplazamiento $\bar{u}$ en un medio elástico, isótropo y homogéneo.

Ondas P

Tomando la divergencia de la ecuación (15),

$$\rho \frac{\partial^2}{dt^2}(\nabla \cdot \bar{u}) = (\lambda + 2\mu)\nabla \cdot \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \cancelto{0}{\mu\nabla \cdot (\nabla \times (\nabla \times \bar{u}))}$$

$$\rho \frac{\partial^2}{dt^2}(\nabla \cdot \bar{u}) = (\lambda + 2\mu)\nabla^2(\nabla \cdot \bar{u})$$

$$\frac{\partial^2}{dt^2}(\nabla \cdot \bar{u}) = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)\nabla^2(\nabla \cdot \bar{u}) \tag{16}$$

La ecuación (16) describe la propagación de un cambio del volumen del medio, $(\nabla \cdot \bar{u})$, como una onda a una velocidad

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \tag{17}$$

Esta onda es una onda P!

Ondas S

Se puede tomar el rotor de la ecuación (15), y usar la identidad vectorial

$$\nabla^2(\nabla \times \bar{u}) = \nabla(\nabla \cdot (\nabla \times \bar{u})) - \nabla \times (\nabla \times (\nabla \times \bar{u}))$$

para llegar a la ecuación

$$\frac{\partial^2}{dt^2}(\nabla \times \bar{u}) = \left(\frac{\mu}{\rho}\right) \nabla^2(\nabla \times \bar{u}) \tag{18}$$

La ecuación (18) describe la propagación de una deformación del cizalle del medio, $(\nabla \times \bar{u})$, como una onda a una velocidad

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{19}$$

Esta onda es una onda S!

Lectura adicional

- Apuntes del curso, Capítulo 4. Secciones 4.5 y 4.6 (primera parte).

Preguntas prácticas

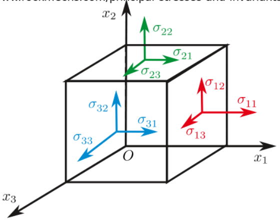
1. Muestre que

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\epsilon_{kl} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij} = \lambda\delta_{ij}\Delta + 2\mu\epsilon_{ij} \tag{20}$$

¿Qué representa Δ?

2. (a) Un esfuerzo de 10 Pa sobre un cubo con dimensiones de $5 \times 5 \times 5$ cm esta en la dirección σ_{11}. La extensión del cubo en la dirección x_1 es 0.004 cm. ¿Cuál es la deformación ϵ_{11} entonces? ¿Cuáles son sus unidades?

www.rockmechs.com/principal-stresses-and-invariants/



Preguntas prácticas

(b) ¿Si no hay un cambio en el volumen del cubo, las otras dos dimensiones se contraen de manera igual, y entonces el cubo cambia a un cuboide, ¿qué deformaciones están distintos de cero en esta situación? Calcule sus valores.

(c) Asume que el cubo es un material isótropo, homogéneo, elástico y continuo. Calcule el módulo de rigidez para este material (la ecuación (20) ayuda).

(d)¿Por qué no se puede calcular λ con el experimento así? ¿Qué cambio experimental hay que hacer para conseguir λ para este material?

3. Tome el rotor de la ecuación (15) de esta presentación para mostrar que se llega a la ecuación (18) que describe la propagación de una onda S.