# 513335 Geofísica de la Tierra Sólida

## Presentación 14
## Introducción a la Sismología
## Versión 1.0

## Terminología en la sismología

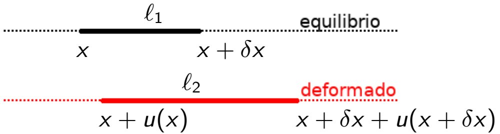
En la sismología estamos considerando los desplazamientos en un medio tres dimensional.

- La posición de un punto dentro de la Tierra esta representada por $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$
- El desplazamiento de este punto, desde su equilibrio, esta representada por $\bar{u}(\bar{x}) = (u_1, u_2, u_3) \equiv (u_x, u_y, u_z)$
- Este punto se mueve con una velocidad de $\dot{\bar{u}} = \frac{d\bar{u}}{dt}$
- La aceleración del punto es $\ddot{\bar{u}} = \frac{d^2\bar{u}}{dt^2}$

La traza de un sismómetro representa la velocidad del suelo en el punto de la medición. La traza de un acelerómetro representa la aceleración del suelo en el punto de la medición.

## La deformación (strain)

La deformación ($\epsilon$) de un medio representa las distorsiones que contiene. Las distorsiones pueden estar asociadas con cambios de volumen o con cizalle en el medio. **En una dimensión**:




La deformación es una medida de la extensión que sufre la línea, sobre su largo inicial, de un cierto segmento de línea.

$$\epsilon_{xx} = \frac{\ell_2 - \ell_1}{\ell_1} = \frac{[x + \delta x + u(x + \delta x)] - [x + u(x)]) - [(x + \delta x) - (x)]}{[(x + \delta x) - (x)]} \qquad (1)$$

¿Cuáles son las dimensiones de $\epsilon_{xx}$?

¿Si la deformación esta negativa, qué significa sobre la extensión de la línea?

## La deformación (strain)

Entonces

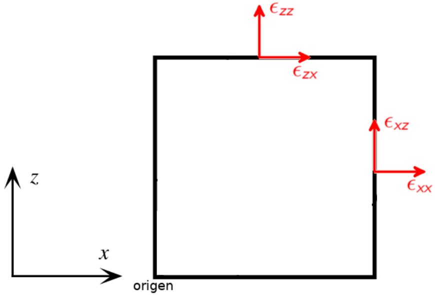
$$\epsilon_{xx} = \frac{u(x+\delta x) - u(x)}{\delta x} \approx \frac{u(x) + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x - u(x)}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (2)$$

La deformación de la línea, $\epsilon_{xx}$, esta dada por el cambio espacial del campo de desplazamiento del medio, $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Esta definición de deformación esta válida para pequeños elementos y pequeños desplazamientos. En la ecuación (2) hemos tomado $u(x+\delta x) \approx u(x) + \frac{\partial u}{\partial x}\delta x$, ignorando los términos del orden $(\delta x^2)$ y entonces tomando la suposición que el desplazamiento $u$ se cambia linealmente con la distancia $x$ por el elemento de línea.

## Deformación en 2D

Podemos extender esta idea a un elemento dos dimensional (en el plano $x - z$). Ahora los desplazamientos pueden estar en dos diferentes direcciones, de lados de un elemento dos dimensional, y tenemos la siguiente situación:

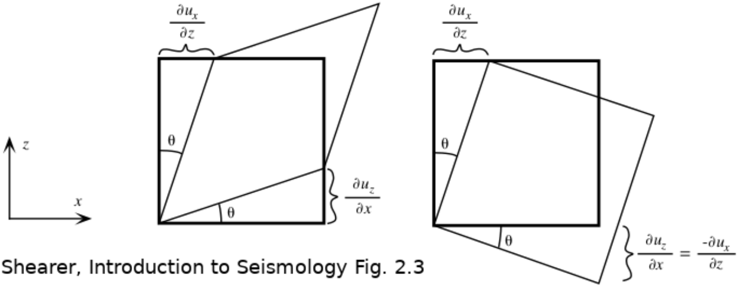



$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$\epsilon_{ij}$ representa la deformación en la dirección $j$ aplicado al lado del elemento con vector normal en la dirección $i$.

## Deformación en 2D

Como antes, se puede representar los elementos de la deformación como cambios espaciales en el campo de desplazamiento: $\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$




Shearer, Introduction to Seismology Fig. 2.3

$\epsilon_{xz}$ positivo
$\epsilon_{zx}$ positivo

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

$\epsilon_{xz}$ negativo
$\epsilon_{zx}$ positivo

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuál situación corresponde a cizalle, y cuál a rotación?

## Deformación en 3D

En tres dimensiones, usamos un tensor de deformación:

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \tag{3}$$

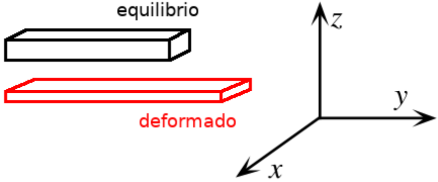
- Los elementos diagonales como $\epsilon_{xx}$ representan deformación extensional/compresional.
- Los elementos fuera de la diagonal como $\epsilon_{xy}$ representan deformación cortante (cizalle).
- En la sismología, cuando pasan ondas sísmicas, las deformaciones de la Tierra son de extensión/compresión y de cizalle.
- Si no hay rotaciones del medio, significa que el tensor de deformación es simétrico $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. ¿Entonces, cuántos elementos diferentes tiene el tensor de deformación?

Nuevamente,se puede representar los elementos de la deformación como cambios espaciales en el campo de desplazamiento:

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv \frac{1}{2}\left(\epsilon_{ji} + \epsilon_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{4}$$

## Deformación en 3D - Ejemplo

Consideremos la extensión de una banda elástica en tres dimensiones:




En este ejemplo, tenemos extensión en las direcciones $x$ e $y$, y compresión en la dirección $z$:

- $\epsilon_{xx}$ y $\epsilon_{yy}$ son positivos.
- $\epsilon_{zz}$ es negativo.

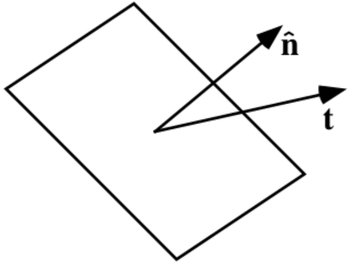
Noten si $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} = 0$ no hay cambio de volumen del medio.

El tipo de deformación que sufre el medio depende de dos cosas: (i) El tipo de esfuerzo aplicado, y (ii) las propiedades elásticas del medio.

# El esfuerzo (stress)

Cuando hablamos del esfuerzo, hablamos de una fuerza por unidad de área con unidades de [N/m$^2$] o [Pa].

Shearer, Introduction to Seismology

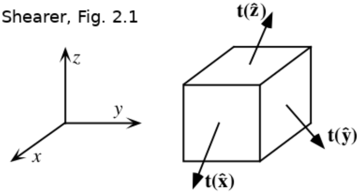



- Esfuerzo normal es el componente del esfuerzo perpendicular a una superficie.
- Esfuerzo cortante es el componente del esfuerzo paralelo a una superficie.

# Tracciones

En tres dimensiones, los elementos de volumen, en el sistema cartesiana, tienen la forma de un cubo infinitésimo. Las tres caras del cubo, con vectores normales en la dirección $x$, $y$ y $z$, están sujeto de esfuerzos representados por los vectores de tracción $t(\hat{x})$, $t(\hat{y})$ y $t(\hat{z})$.

Shearer, Fig. 2.1




Cada vector de tracción en el medio tres dimensional tiene tres componentes:

$$t(\hat{x}) = (t_x(\hat{x}), t_y(\hat{x}), t_z(\hat{x})) \quad (5)$$

Entonces, para representar todos los componentes de esfuerzo que actúan sobre las superficies, se requieren los nueve elementos del tensor del esfuerzo.

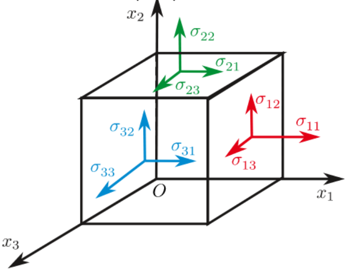
## El tensor del esfuerzo

Definimos un tensor del esfuerzo, $\sigma_{ij}$, tal que:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t_x(\hat{x}) & t_y(\hat{x}) & t_z(\hat{x}) \\ t_x(\hat{y}) & t_y(\hat{y}) & t_z(\hat{y}) \\ t_z(\hat{x}) & t_y(\hat{z}) & t_z(\hat{z}) \end{pmatrix} \tag{6}$$

En esta definición, $\sigma_{ij} \equiv t_j(\hat{i})$ que representa el esfuerzo en la dirección $j$, sobre la superficie con vector normal $\hat{i}$.

www.rockmechs.com/principal-stresses-and-invariants/



# El tensor del esfuerzo

- Los elementos diagonales como $\sigma_{xx}$ representan esfuerzos normales.
- Los elementos fuera de la diagonal como $\sigma_{xy}$ representan esfuerzos cortantes.
- Cómo el tensor de deformación, el tensor del esfuerzo en la sismología esta simétrico para evitar rotaciones del medio $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

El esfuerzo total en la dirección $i$ sobre un plano arbitrario definido por el vector $\hat{n}$ es la combinación de los elementos del tensor del esfuerzo multiplicado por el vector del plano. Por ejemplo en la dirección $x$:

$$T_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \tag{7}$$

En general, usando la notación de Einstein:

$$T_i = \sigma_{ji} n_j \tag{8}$$

## El tensor del esfuerzo - ejes principales

Podemos cambiar los ejes $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ al $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ y $\hat{z}'$ para diagonalizar la matriz $\sigma_{ij}$ (a través de eigenvectores y eigenvalores). En el nuevo marco de referencia:

$$\sigma'_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

- Esfuerzo uniaxial tiene, por ejemplo, $\sigma_1 \neq 0$ con $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$
- Esfuerzo en un plano tiene, por ejemplo, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_3 \neq 0$
- Esfuerzo cortante puro en un plano tiene, por ejemplo, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -\sigma_3$
- Esfuerzo isotrópico o hidroestático tiene $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -P$ ¿Qué representa la letra $P$? ¿Por qué es negativo?

El esfuerzo desviatorio es el esfuerzo que se desvía del esfuerzo isotrópico. El esfuerzo desviatorio es el esfuerzo usado en la sismología. Los esfuerzos son las desviaciones desde el punto del equilibrio, generan desplazamientos ($\bar{u}$) del medio que son desde el punto de equilibrio también. Vamos a ver que estos desplazamientos son las oscilaciones de las ondas sísmicas.

## Lectura adicional

- Apuntes del curso, Capítulo 4. Secciones 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4.

# Preguntas prácticas

En la siguiente presentación ...