# 513335 Geofísica de la Tierra Sólida

## Presentación B
## Notación de Einstein
## Versión 1.1

## Vectores en 3 dimensiones

En este documento muchos ejemplos están dadas para cosas (vectores, tensores) 3 dimensionales, pero siempre se puede generalizar las ideas a más dimensiones. Además los ejemplos dados están mayormente asociados con los contenidos del curso. Más información está dada en el anexo.

Vectores en 3 dimensiones se pueden expandir en una base de coordenadas, por ejemplo en la base cartesiana

$$\bar{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} \tag{1}$$

Típicamente, se reemplazan los índices $x$, $y$, $z$, por los números 1, 2, 3, tal que

$$(v_x, v_y, v_z) \equiv (v_1, v_2, v_3) \tag{2}$$

y podemos reemplazar los tres vectores unitarios por el símbolo $\hat{e}_i$, con $i$ de 1 a 3, tal que

$$\hat{e}_1 \equiv \hat{i} \quad \hat{e}_2 \equiv \hat{j} \quad \hat{e}_3 \equiv \hat{k} \tag{3}$$

## Vectores en 3 dimensiones

Entonces, en esta nomenclatura la equivalencia a la ecuación (1) es

$$\bar{v} = v_1\hat{e}_1 + v_2\hat{e}_2 + v_3\hat{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i\hat{e}_i \quad (4)$$

En la notación de Einstein, se puede perder el símbolo de la suma, entonces

$$\bar{v} \equiv v_i\hat{e}_i \quad (5)$$

y la suma esta implícita.

Incluso, se pueden perder los vectores unitarios $\hat{e}_i$ en la definición, por ejemplo en el curso se define un vector $f_i$ que representa las fuerzas actuando en un elemento de volumen dentro de la Tierra. En este caso,

$$f_i \equiv (f_1, f_2, f_3) \equiv (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)) \quad (6)$$

donde, por ejemplo, la fuerza $f_1$ está la fuerza que se siente en la dirección $\hat{x}$ por el punto en el medio a una posición $(x, y, z)$.

# Ejemplo: El producto escalar

Si queremos escribir el producto escalar $(\bar{a} \cdot \bar{b})$ en la notación de Einstein

$$
\begin{aligned}
(\bar{a} \cdot \bar{b}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Se nota que la suma es sobre los tres elementos de los vectores. De nuevo podemos cambiar a la nomenclatura eliminando la parte de la suma

$$(\bar{a} \cdot \bar{b}) \equiv a_i b_i \qquad (8)$$

La suma sobre los elementos está dada, incluso si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ tenían más que tres dimensiones, la nomenclatura funciona.

Importante: Si un índice aparece dos veces en un término, implica que sumamos sobre este índice.

## Operaciones en matrices

Tomaremos una multiplicación simple de matrices $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

En la forma de ecuaciones tenemos

$$b_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \tag{10}$$

$$b_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \tag{11}$$

$$b_3 = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \tag{12}$$

y podemos representar este sistema de 3 ecuaciones con una indice $i$, donde $i = 1, 2, 3$

$$b_i = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + A_{i3}x_3 = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}x_j \tag{13}$$

## Operaciones en matrices

De nuevo, no es necesario poner la suma en la representación, entonces la multiplicación simple de matrices dada en la ecuación (9) se puede escribir en la notación

$$b_i = A_{ij} x_j \tag{14}$$

Cómo antes la ecuación (14) se puede extender a cualquier dimensión.

- Noten que en la ecuación (14) la índice $j$ esta repetida dos veces en un término, lo que implica que hay que sumar sobre todos los $j$ en este término.
- La índice $i$ aparece una vez en cada término, entonces la ecuación (14) representa (en 3D) un sistema de 3 ecuaciones por $i = 1$, $i = 2$ e $i = 3$.
- Índices deberían aparecer uno o dos veces en cada término, no más.

## La delta de Kronecker

En la notación de Einstein, la delta de Kronecker ($\delta_{ij}$) es un símbolo muy útil, con definición

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Esencialmente $\delta_{ij}$ es la representación de la matriz identidad. La función de la delta de Kronecker en una suma es que reemplaza un índice por otro; por ejemplo $\delta_{jn}$ en una suma solo tiene un valor distinto de cero cuando $j = n$ y cada índice $j$ en el término se puede reemplazar por $n$, o viceversa:

$$c_{ij}\delta_{jn} \equiv \sum_{j=1}^{3} c_{ij}\delta_{jn} = c_{in} \tag{15}$$

Unos mas usos de la delta de Kronecker son

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \tag{16}$$

y

$$\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{ik} \tag{17}$$

# El símbolo de Levi-Civita

El símbolo de Levi-Civita ($\epsilon_{ijk}$) se defina por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{para permutaciones cíclicas de } ijk \\ -1 & \text{para permutaciones anticíclicas de } ijk \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases} \tag{18}$$

Por ejemplo (en 3D)

$$\begin{aligned} \epsilon_{1jk} a_j b_k &= \sum_j \sum_k \epsilon_{1jk} a_j b_k \\ &= \cancel{\epsilon_{111}} a_1 b_1 + \cancel{\epsilon_{112}} a_1 b_2 + \cancel{\epsilon_{113}} a_1 b_3 + \cancel{\epsilon_{121}} a_2 b_1 + \cancel{\epsilon_{122}} a_2 b_2 \\ &+ \epsilon_{123}\, a_2 b_3 + \cancel{\epsilon_{131}} a_3 b_1 + \epsilon_{132}\, a_3 b_2 + \cancel{\epsilon_{133}} a_3 b_3 \\ &= a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{aligned} \tag{19}$$

Se puede generalizar la ecuación (19) por

$$(\bar{a} \times \bar{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{20}$$

Debería comentar que en el capítulo de sismología de este curso, no ocupo el símbolo de Levi-Civita, de hecho uso $\epsilon$ para representar la deformación dentro de la Tierra.

## Operadores simples usando la notación de Einstein

1. Gradiente de un campo escalar

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right) \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \tag{21}$$

2. Divergencia de un campo vectorial

$$\nabla\cdot\bar{\psi} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\psi_3}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial\psi_i}{\partial x_i} \tag{22}$$

3. El operador Laplaciano (este operador actúa sobre un campo escalar)

$$\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} \tag{23}$$

Cabe mencionar que en la última ecuación, $\frac{\partial^2\phi}{\partial x_i^2} \equiv \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_i}$, el índice $i$ aparece dos veces que implica la suma.

## Operadores simples usando la notación de Einstein

4. El operador Laplaciano vectorial, que tiene definición

$$\nabla^2 \bar{u} = \nabla(\nabla \cdot \bar{u}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{u}) \tag{24}$$

en coordenadas cartesianas, tiene la forma de

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{u} &= \left(\nabla^2 u_1, \nabla^2 u_2, \nabla^2 u_3\right) \qquad (25) \\ &= \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}, \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}, \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right) \end{aligned}$$

en que los $u_j$ son los componentes del vector $\bar{u}$. En la notación de Einstein

$$\nabla^2 \bar{u} = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2} \tag{26}$$

Noten que se pueden combinar los operadores, por ejemplo

$$\nabla(\nabla \cdot \bar{u}) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \tag{27}$$

# Lectura adicional

- Apuntes sobre la Notación de Einstein [V. Ortiz]
- Apuntes sobre la Notación de Einstein [R. Cifuentes]
- Univ. Oxford, Vectors and Matrices
- Univ. Cambridge, Index notation