Universidad de Concepción

513335 Geofísica de la Tierra Sólida

Presentación A
La Ecuación de Laplace y Armónicos Esféricos
Versión 1.1

Ecuación de Laplace

El potencial gravitacional terrestre cumpla la ecuación de Laplace para observaciones en la superficie de la Tierra hacia afuera.

$$\nabla^2 U(\bar{r}) = 0 \tag{1}$$

Nuestra meta es encontrar una solución para U. Para la Tierra, es mejor trabajar en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) dado que los ángulos involucrados representan la colatitud y la longitud del punto de observación $\bar{r}$.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0 \tag{2}$$

Tenemos una ecuación diferencial parcial del segundo orden. ¿Cómo debemos proceder?

Ecuación de Laplace: Separación de variables

Para proceder con la solución de la ecuación de Laplace, probamos la separación de variables

$$U(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{3}$$

Si la situación permite que se pueden separar los variables en los dos lados de la ecuación, esta técnica se puede aplicar para encontrar la solución a la ecuación diferencial parcial. Pongamos nuestra expresión para U, de la ecuación (3), dentro de la ecuación (2):

$$\frac{\Theta\Phi}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{R\Phi}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \frac{R\Theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0 \tag{4}$$

Ahora, multiplicamos la ecuación (4) por $\frac{r^2}{U}$ o $\frac{r^2}{R\Theta\Phi}$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = 0 \tag{5}$$

El siguiente paso es evaluar las diferenciaciones $\frac{\partial}{\partial r}$ y $\frac{\partial}{\partial\theta}$ usando la regla del producto: $\frac{\partial}{\partial x}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Ecuación de Laplace: Separación de variables

$$\underbrace{\frac{1}{R}\left[2r\frac{\partial R}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right]}_{\text{const.}}+\underbrace{\frac{1}{\Theta\sin\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\right]+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}}_{\text{-const.}}=0 \quad (6)$$

Hemos separado la ecuación a una parte radial (R) y una parte angular (Θ, Φ). El punto absolutamente fundamental aquí es que **ambas partes son constantes y las dos constantes suman cero.**

Para visualizar eso, imaginen que una función $R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ cumpla la ecuación (6) en un cierto punto (r, θ, ϕ). Ahora, si cambiamos el radio r del punto de observación, manteniendo la longitud y latitud constante, la parte angular de la ecuación no cambia su valor. Entonces, para cumplir la ecuación (6) en la nueva posición, la parte radial de la ecuación tampoco puede cambiar su valor, tiene que estar constante cuando cambiamos r.

El mismo argumento, cambiando la latitud y longitud del punto de observación pero manteniendo su distancia radial constante, significa que la parte angular de la ecuación es constante con respecto al θ y ϕ.

La parte radial

La función $R(r)$ cumpla la parte radial de la ecuación (6):

$$\frac{1}{R}\left[2r\frac{\partial R}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right] = \text{const.}$$

$$2r\frac{\partial R}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = \text{const.}R \tag{7}$$

Probamos la solución $R = \alpha r^\ell$ con α y ℓ constantes:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2r\ell\alpha r^{\ell-1} + r^2\ell(\ell-1)\alpha r^{\ell-2} &= \text{const.}\alpha r^\ell \\ 2\ell + \ell(\ell-1) &= \text{const.} \\ 2\ell + \ell^2 - \ell &= \text{const.} \\ \ell(\ell+1) &= \text{const.} \end{aligned}$$

Entonces, $R = \alpha r^\ell$ es una solución al parte radial cuando la constante es representada por $\ell(\ell+1)$.

La parte radial

La función $R(r)$ cumpla la parte radial de la ecuación (6):

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\left[2r\frac{\partial R}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right] &= \text{const.}\\ 2r\frac{\partial R}{\partial r}+r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} &= \text{const.}R \qquad (7)\end{aligned}$$

Probamos la solución $R=\beta r^{-(\ell+1)}$ con β y ℓ constantes:

$$\begin{aligned}\Rightarrow -2r(\ell+1)\beta r^{-(\ell+2)}+r^2(\ell+1)(\ell+2)\beta r^{-(\ell+3)} &= \text{const.}\beta r^{-(\ell+1)}\\ -2(\ell+1)+(\ell+1)(\ell+2) &= \text{const.}\\ -2\ell-2+\ell^2+3\ell+2 &= \text{const.}\\ \ell(\ell+1) &= \text{const.}\end{aligned}$$

Entonces, $R=\beta r^{-(\ell+1)}$ es una solución al parte radial cuando la constante es representada por $\ell(\ell+1)$.

La parte radial

La función $R(r)$ cumpla la parte radial de la ecuación (6):

$$\frac{1}{R}\left[2r\frac{\partial R}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right] = \text{const.}$$

$$2r\frac{\partial R}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = \text{const.}R \tag{7}$$

La solución general para R es

$$R = \alpha r^{\ell} + \beta r^{-(\ell+1)} \tag{8}$$

con α, β y ℓ constantes, y el valor de la const. en las ecuaciones (6) y (7) es $\ell(\ell+1)$.

La parte angular

Las funciones $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$ cumplan la parte angular de la ecuación (6), con la const. igual al $\ell(\ell+1)$:

$$\frac{1}{\Theta \sin\theta}\left[\cos\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\right]+\frac{1}{\Phi\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=-\ell(\ell+1) \tag{9}$$

Multiplicamos la ecuación (9) por $\sin^2\theta$ y reorganizamos

$$\underbrace{\frac{\sin\theta}{\Theta}\left[\cos\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\right]+\ell(\ell+1)\sin^2\theta}_{m^2}+\underbrace{\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}}_{-m^2}=0 \tag{10}$$

Como antes, hemos separados las partes de colatitud (θ) y longitud (ϕ) en esta ecuación. Ambas partes tienen que estar constante, la suma de las constantes cero, y llamaremos las constantes m^2 y $-m^2$.

Con esta reorganización de la parte angular, hemos generado ecuaciones para la parte de longitud y la parte de colatitud.

La parte de la longitud

La función $\Phi(\phi)$ cumpla la parte de longitud de la ecuación (10):

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -m^2$$
$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = -m^2\Phi \quad (11)$$

La solución general para Φ es

$$\Phi = \alpha' \cos(m\phi) + \beta' \sin(m\phi) \quad (12)$$

con α' y β' constantes.

En este punto, es importante recordar que ϕ representa la longitud, que cubre 360 grados en total, entonces una condición sobre la función longitudinal es

$$\Phi\big|_{\phi=0^\circ} = \Phi\big|_{\phi=360^\circ} \quad (13)$$

La condición mostrada en (13) se cumpla si m es un número entero.

La parte de la colatitud

La función $\Theta(\theta)$ cumpla la parte de colatitud de la ecuación (10):

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\left[\cos\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}+\sin\theta\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}\right]+\ell(\ell+1)\sin^2\theta=m^2 \tag{14}$$

Multiplicamos la ecuación (14) por $\frac{\Theta}{\sin^2\theta}$ y reorganizamos

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0 \tag{15}$$

En este punto hagamos un cambio de variable,

$$\mu=\cos\theta$$

Ahora la función Θ es una función de este variable:

$$\Theta=P(\mu)$$

La parte de la colatitud

Vamos a usar ($\sin^2\theta = 1 - \mu^2$) y las derivadas parciales:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} = \frac{\partial P}{\partial\theta} = \frac{\partial\mu}{\partial\theta}\frac{\partial P}{\partial\mu} = \frac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial P}{\partial\mu} = -\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\mu}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\mu}\right) \\
&= -\cos\theta\frac{\partial P}{\partial\mu} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial P}{\partial\mu}\right) \\
&= -\cos\theta\frac{\partial P}{\partial\mu} - \sin\theta\underbrace{\frac{\partial\mu}{\partial\theta}}_{-\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\partial P}{\partial\mu}\right) \\
&= -\cos\theta\frac{\partial P}{\partial\mu} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\mu^2}
\end{aligned}$$

La parte de la colatitud

Volvemos a la ecuación (15) y aplicamos este cambio de variable

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} \quad & + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0 \quad (15) \\
\sin^2\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\mu^2} - \cos\theta\frac{\partial P}{\partial\mu} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(-\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\mu}\right) \quad & + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P = 0 \\
\sin^2\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\mu^2} - \cos\theta\frac{\partial P}{\partial\mu} - \cos\theta\left(\frac{\partial P}{\partial\mu}\right) \quad & + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right] P = 0
\end{aligned}$$

Entonces

$$(1-\mu^2)\frac{\partial^2 P}{\partial\mu^2} - 2\mu\frac{\partial P}{\partial\mu} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{(1-\mu^2)}\right] P = 0 \qquad (16)$$

La ecuación (16) es la famosa ecuación asociada de Legendre.

Polinomios de Legendre: Solución

La ecuación asociada de Legendre (16) tiene para su solución los polinomios asociados de Legendre $P_\ell^m(\mu)$:

$$P_\ell^m(\mu) = \frac{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{2^\ell \ell!} \frac{\partial^{(\ell+m)}}{\partial \mu^{(\ell+m)}} \left(\mu^2 - 1\right)^\ell \tag{17}$$

Aquí el $2^\ell \ell!$ es un factor de normalización para que $P_\ell^0(1) = 1$. Si tienen ganas, se puede poner la ecuación (17) dentro de la ecuación (16) para mostrar que es una solución.

Con esta solución, se requiere que ℓ y m son números enteros, $\geqslant$ cero, además hay una restricción adicional sobre ellas.

Polinomios de Legendre: Restricciones sobre ℓ y m

Parte de la definición de los polinomios de Legendre es

$$\frac{\partial^{(\ell+m)}}{\partial\mu^{(\ell+m)}}\left(\mu^2-1\right)^\ell = \frac{\partial^{(\ell+m)}}{\partial\mu^{(\ell+m)}}\left(\mu^{2\ell}+\text{cte.}\mu^{2\ell-2}+\ldots+(-1)^\ell\right) \tag{18}$$

• Si $m > \ell \Rightarrow \ell + m > 2\ell \Rightarrow$ la expresión (18) es cero. Polinomios de Legendre no existen para $m > \ell$.

• Si $m = \ell \Rightarrow \ell + m = 2\ell \Rightarrow$ la expresión (18) es $\frac{\partial^{(2\ell)}}{\partial\mu^{(2\ell)}}\left(\mu^{2\ell}+\ldots\right) = (2\ell)!$ una constante.

• Si $m < \ell \Rightarrow \ell + m < 2\ell \Rightarrow$ la expresión (18) es una función de μ.

La conclusión es que las soluciones a la ecuación de Laplace son para ℓ y m enteros, $\geqslant 0$, con $\ell \geqslant m$.

Polinomios de Legendre: Las funciones para ciertos ℓ y m

Cuando ℓ y m aumentan, la complejidad de los polinomios aumenta.

$$
\begin{aligned}
P_0^0(\mu) &= 1 \\
P_1^0(\mu) &= \mu = \cos\theta \\
P_2^0(\mu) &= \frac{1}{2}\left(3\mu^2 - 1\right) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) \\
P_3^0(\mu) &= \frac{1}{2}\left(5\mu^3 - 3\mu\right) = \frac{1}{2}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right) \\
P_1^1(\mu) &= \sqrt{(1-\mu^2)} = \sin\theta \\
P_2^1(\mu) &= 3\mu\sqrt{(1-\mu^2)} = 3\cos\theta\sin\theta \\
P_2^2(\mu) &= 3(1-\mu)^2 = 3\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

Los polinomios de Legendre son funciones de colatitud, y son las soluciones para $\Theta(\theta)$ en la solución para la ecuación de Laplace.

La solución general

Hemos visto que la ecuación de Laplace, $\nabla^2 U = 0$, puede estar resuelta por la separación de variables $U = R\Theta\Phi$ con

$$U = \underbrace{\left(\alpha r^{\ell} + \beta r^{-(\ell+1)}\right)}_{R} \underbrace{\left(\alpha' \cos(m\phi) + \beta' \sin(m\phi)\right)}_{\Phi} \underbrace{P_{\ell}^{m}(\cos\theta)}_{\Theta} \tag{19}$$

ℓ y m tienen que estar enteros, mayor o igual a cero, con $\ell \geqslant m$. Entonces, la solución general a la ecuación de Laplace es la suma sobre todos los posibles ℓ y m:

$$U = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left(\alpha r^{\ell} + \beta r^{-(\ell+1)}\right) \left(\alpha' \cos(m\phi) + \beta' \sin(m\phi)\right) P_{\ell}^{m}(\cos\theta) \tag{20}$$

Las constantes α, β, α' y β' se pueden combinar, y además se pueden tener diferentes constantes para diferentes valores de ℓ y m. La parte radial tiene dos términos, típicamente se elige el término dependiendo si estas a un mayor radio que la masa que produce el potencial ($U|_{r\to\infty} = 0$), o a un menor radio ($U|_{r\to 0} = 0$). (Para la Tierra, siempre medimos afuera de su superficie y el potencial decae con distancia.)

La solución general

Combinando las constantes α, β, α' y β', la solución general para el potencial gravitacional (o incluso cualquier potencial que cumpla la ecuación de Laplace), es:

$$U(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\ell} \left\{ \begin{array}{c} r^{\ell} \\ \left(\frac{1}{r}\right)^{(\ell+1)} \end{array} \right\} [A_{\ell}^{m} \cos(m\phi) + B_{\ell}^{m} \sin(m\phi)] P_{\ell}^{m}(\cos\theta) \quad (21)$$

En esta ecuación $P_{\ell}^{m}(\cos\theta)$ son los polinomios de Legendre, A_{ℓ}^{m} y B_{ℓ}^{m} son constantes para cada ℓ y m (las coeficientes de Gauss).

Hemos encontrado la solución a la ecuación de Laplace!

Lectura adicional

- Sobre la ecuación asociada de Legendre de Wolfram MathWorld.
- Sobre los polinomios asociados de Legendre de Wolfram MathWorld.
- La vizualización de los armónicos esféricos del International Centre for Global Earth Models (ICGEM).