

Geofísica de la Tierra Sólida 2016 - Certamen 1

2 horas

Importante: Hay que elegir 5 de las 7 preguntas de la sección A, y elegir 2 de las 4 preguntas en la sección B.

La sección A consta de 25 puntos, la sección B de 25 puntos.

Sección A [Elija 5 de las 7 preguntas. Todas las preguntas constan de 5 pts (=50% en total)]

A1)

Planeta	$R_{\text{ecuatorial}}$ [km]	R_{polar} [km]
Tierra	6378	6357
Júpiter	71492	66854

(a) [2 pts] ¿Por qué $\frac{R_{\text{ecuatorial}}}{R_{\text{polar}}} > 1$ para la Tierra?

(b) [3 pts] Especule las razones del por qué la tasa $\frac{R_{\text{ecuatorial}}}{R_{\text{polar}}}$ es aún mayor para el planeta Júpiter.

A2) [5 pts] ¿Qué evidencia existe que implica que la Tierra estaba en un estado fundido cuando se formó? Piense en evidencia directamente medida en rocas, evidencia de modelación numérica y evidencia de la estructura de la Tierra.

A3) La ecuación de decaimiento radiométrico está dada por:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

(a) [2 pts] En palabras, ¿qué significa la vida media de este sistema?

(b) [2 pts] ¿Cuál es la relación entre la constante de decaimiento, λ , y la vida media?

(c) [1 pts] ¿Cuáles son las unidades de λ ?

A4) [5 pts] Una de las ecuaciones para el campo g de referencia usada en geodesia está dada por el International Gravity Formula (1967):

$$g = 9.780327(1 + 0.0052792 \sin^2 \lambda + 0.0000232 \sin^4 \lambda)$$

con λ la latitud. Explique por qué no existen los términos $\sin \lambda$ o $\sin^3 \lambda$ en esta ecuación.

A5) Una ecuación para el potencial gravitacional terrestre desarrollado en el curso fue:

$$U = -\frac{GM}{r} + \frac{GJ_2Ma^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

- (a) [1 pt] ¿Qué representa a ?
- (b) [3 pts] Explique qué representa J_2 , y por qué este término es positivo.
- (c) [1 pts] ¿Por qué ϕ no está incluido en esta ecuación?
-

A6) En el geomagnetismo:

- (a) [3 pts] Explique qué es la “suposición de un dipolo axial”.
- (b) [2 pts] Esta suposición, ¿para qué sirve?
-

A7)

- (a) [3 pts] ¿Qué representan \mathbf{H} , t , \mathbf{v} , μ_0 , σ ; en la ecuación de inducción magnética?

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{H}$$

- (b) [2 pts] Identifique la parte de la ecuación que representa la advección del campo magnético.

Sección B [Elija 2 de las 4 preguntas, 12.5 pts cada una (=50% en total)]

B1) [12.5 pts total]

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ [m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\text{]}$$

$$\text{Radio de la Tierra} = 6371 \text{ [km]}$$

$$\text{Masa de la Tierra} = 5.97 \times 10^{24} \text{ [kg]}$$

Derivada en la Tarea 1, la energía gravitacional liberada (Ω en [J]) durante la formación de un planeta esférico y homogéneo (ρ constante) es:

$$\Omega = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

(a) [2 pts] Calcule este valor de Ω para la formación de la Tierra.

Además, durante la formación inicial de la Tierra, decaimiento radiactivo se liberó energía a una tasa de

$$\alpha = 1 \times 10^{-9} \text{ [W/kg]}$$

(es decir, la cantidad de energía por kilo de material por segundo).

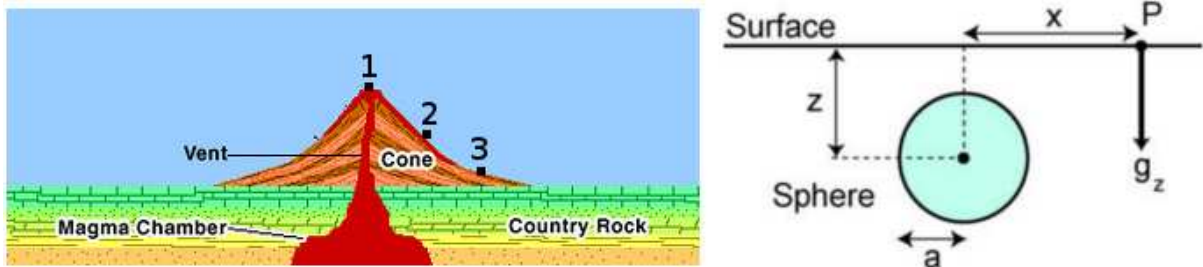
(b) [3 pts] Si se estima que la formación de la Tierra duró ~ 100 millones de años, muestre que la cantidad de energía *total* liberada por su formación es $\simeq 2.4 \times 10^{32}$ [J].

(c) [4 pts] Usando un calor específico de $C_p = 1000$ [Jkg⁻¹K⁻¹] para la Tierra, y suponiendo que una fracción, $\epsilon = 0.025$, de la energía total es atrapada como calor cuando la Tierra se forma, calcule el aumento en la temperatura de la Tierra durante su formación.

(d) [3.5 pts] La separación de la Tierra, inicialmente homogénea, en una estructura que contiene un núcleo y un manto libera todavía más energía. Explique por qué.

Sección B [Elija 2 de las 4 preguntas, 12.5 pts cada una (=50% en total)]

B2) [12.5 pts total]



Izquierda: Diagrama de una cámara de magma debajo de un volcán, y la posición de los tres puntos [1, 2, 3].
 Derecha: Una esfera, radio a , enterrada a una profundidad z .

La anomalía de gravedad para una esfera enterrada, a una distancia x horizontal del centro de la esfera, es

$$\Delta g_z = \frac{4G\Delta\rho\pi a^3 z}{3(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} [\text{ms}^{-2}]$$

donde $\Delta\rho = \rho_{\text{esfera}} - \rho_{\text{medio}}$.

(a) [6 pts] Calcule Δg_z para una cámara de magma esférica en puntos 1, 2 y 3, y llenar los valores en la Tabla 1. $\rho_{\text{magma}} = 3000 \text{ kgm}^{-3}$; $\rho_{\text{corteza}} = 2400 \text{ kgm}^{-3}$; radio cámara = 2 km; profundidad cámara = 4 km.

(b) [6.5 pts] Calcule el valor de gravedad observado en los tres puntos en la figura y llenar los valores en la Tabla 1. El valor referencial de gravedad a una altura de 0 [m] en esta región es $9.783215 \text{ [ms}^{-2}]$. Aproxima la cámara de magma como una esfera con las mismas dimensiones de la parte (a).

$$dg_{FA} = -2\frac{hg}{r} \quad , \quad dg_B = 2\pi G\rho h$$

$$\Delta g_B = g_{\text{obs}} - dg_{FA} - dg_B - g_{\text{ref}}$$

Punto	Altura [m]	x [m]	Δg_z [ms^{-2}]	g_{obs} [ms^{-2}]
1	1000	0		
2	500	2000	0.000060	
3	100	4000		

Tabla 1: Valores de anomalía de gravedad y gravedad observada en tres puntos encima un volcán.

Recuerde escribir cualquier suposición y mostrar su desarrollo para la respuesta. Llené un valor de la Tabla para ayudar.

Sección B [Elija 2 de las 4 preguntas, 12.5 pts cada una (=50% en total)]

B3) [12.5 pts total]

El potencial del campo magnético terrestre se puede escribir en términos de armónicos esféricos:

$$V_m = a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} (g_l^m \cos m\phi + h_l^m \sin m\phi) P_l^m(\theta)$$

El potencial magnético de un dipolo magnético (m_x, m_y, m_z) es:

$$V_m = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

(a) [4 pts] Encuentre los coeficientes de Gauss que están relacionados con m_x , m_y y m_z , y calcule la constante de proporcionalidad entre los coeficientes de Gauss y las componentes de \mathbf{m} .

Para ayudar: $P_1^0(\theta) = \cos \theta$; $P_1^1(\theta) = \sin \theta$; $\cos \theta = \frac{z}{r}$; $\cos \phi \sin \theta = \frac{x}{r}$; $\sin \phi \sin \theta = \frac{y}{r}$.

(b) [3 pts] Explique los marcos de referencia geográfico y geomagnético.

(c) [5.5 pts] Para el World Magnetic Model 2015, los valores para algunos coeficientes de Gauss en el marco de referencia geográfico son:

$$g_1^0 = -29439 \text{ nT}$$

$$g_1^1 = -1501 \text{ nT}$$

$$h_1^1 = 4796 \text{ nT}$$

Escriba los valores para g_1^0 , g_1^1 y h_1^1 en el marco de referencia geomagnético.

Sección B [Elija 2 de las 4 preguntas, 12.5 pts cada una (=50% en total)]

B4) [12.5 pts total]

Los potenciales gravitacional y magnético pueden estar representado por armónicos esféricos. En forma general, un armónico de grado l y orden m puede estar escrito como:

$$U(r, \theta, \phi) = \left\{ \begin{array}{l} r^l \\ (\frac{1}{r})^{(l+1)} \end{array} \right\} [A_l^m \cos m\phi + B_l^m \sin m\phi] P_l^m(\cos \theta)$$

(a) [2.5 pts] Dibuje la esfera de un armónico típico para:

(i) $m = 0, l \neq 0$ (ii) $m \neq 0, l \neq 0, m \neq l$ (b) [5 pts] En los polos ($\theta = 0$ o $\theta = 180$):

$$P_l^m(\cos \theta) = 0, \quad \text{para } m \neq 0$$

$$P_l^m(\cos \theta) \neq 0, \quad \text{para } m = 0$$

Explique por qué (su respuesta a la parte (a) puede ayudar).

(c) [5 pts] Los armónicos esféricos se aplican para $r > R_{\text{Tierra}}$ para el potencial gravitacional terrestre. Escriba la expresión equivalente para el potencial magnético terrestre, y explique por qué es así.