513513 ADS. Amontonamiento (Stacking)

Versión 1.0

Valor Esperado

El valor esperado, o promedio, de una medición X podemos escribir por $E[X] = \mu$.

En la sismología, podemos pensar en una medición X siendo la medición de velocidad del suelo a un cierto tiempo en un sismograma (es decir, X corresponde a un punto en una serie de tiempo).

Sin ruido sísmico, una medición X sería su valor esperado. Con ruido sísmico, una medición X podría desviarse desde su valor esperado.

El valor esperado satisface las siguientes propiedades:

- El valor esperado de una medición X multiplicado por una constante es igual a la constante multiplicado por el valor esperado de la medición.

$$E[kX] = kE[X] \tag{1}$$

- El valor esperado de la suma de mediciones X y Y es igual a la suma de sus valores esperados.

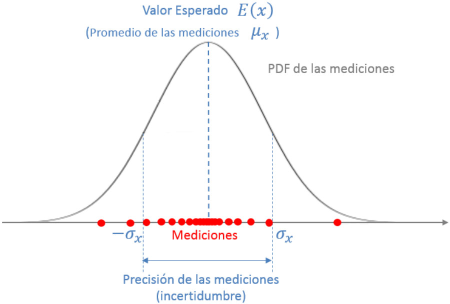
$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \tag{2}$$

Varianza

La propiedad $X - E[X]$ es una variable aleatoria que mide la desviación de la medición X de su valor esperado. En otras palabras, $X - E[X]$ es indicativa del ruido que contiene un punto de la serie de tiempo. Podemos definir la varianza en la medición:

$$Var(X) = E\left[(X - E[X])^2\right]$$
$$\sigma^2 = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

Ref: https://www.kalmanfilter.net/ES/background_es.html



Varianza

Ahora consideremos la varianza en la medición X multiplicado por una constante, y manipular usando la ecuación 1:

$$\begin{aligned} Var(kX) &= E\left[(kX - E[kX])^2\right] \\ &= E\left[(kX - kE[X])^2\right] \\ &= E\left[k^2(X - E[X])^2\right] \\ &= k^2 E\left[(X - E[X])^2\right] \\ \Rightarrow Var(kX) &= k^2 Var(X) \end{aligned} \tag{3}$$

Varianza

Últimamente, veremos la varianza en la suma de mediciones X y Y, usando las ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{aligned}
Var(X+Y) &= E\left[((X+Y)-(E[X+Y]))^2\right] \\
&= E\left[(X+Y)^2 - 2(X+Y)E[X+Y] + (E[X+Y])^2\right] \\
&= E\left[(X+Y)^2 - 2(X+Y)(E[X]+E[Y]) + (E[X]+E[Y])^2\right] \\
&= E\left[X^2 + 2XY + Y^2 - 2XE[X] - 2YE[Y] - 2XE[Y] - 2YE[X]\right. \\
&\quad \left. + E[X]^2 + E[Y]^2 + 2E[X]E[Y]\right] \\
&= E\left[(X^2 - 2XE[X] + E[X]^2) + (Y^2 - 2YE[Y] + E[Y]^2)\right. \\
&\quad +2(XY - XE[Y] - YE[X] + E[X]E[Y])] \\
&= E\left[(X-E[X])^2\right] + E\left[(Y-E[Y])^2\right] + 2E\left[(X-E[X])(Y-E[Y])\right]
\end{aligned}$$

Varianza y Covarianza

Llegamos a la relación

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

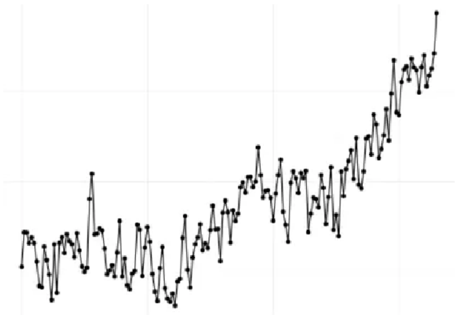
La covarianza entre mediciones X y Y, es decir $Cov(X,Y) = E\left[(X - E[X])(Y - E[Y])\right]$, es el valor esperado del producto entre

1. la desviación de X de su valor esperado, y
2. la desviación de Y de su valor esperado.

Si X y Y están mediciones independientes, por ejemplo el ruido en la medición X tiene ningún relación con el ruido en la medición Y, la correlación entre el ruido en las dos mediciones es cero, y su covarianza es cero. En este caso:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) \qquad (X,\ Y \text{ independientes entre ellas}) \tag{4}$$

Amontonamiento - principio estadístico



A un cierto tiempo en un sismograma, una medición, X, de una señal sísmica, tiene ruido incorporado. Podemos decir que la medición tiene una función de densidad de población $f(x)$, donde el valor esperado de X es μ (el promedio de $f(x)$), y la varianza en X es σ^2. Si hay mayor ruido en la señal, su desviación estándar σ sería mayor.

- μ se llama el promedio de la población $f(x)$
- σ^2 se llama la varianza en la población $f(x)$

Amontonamiento - principio estadístico

Ahora vamos a tomar n mediciones independientes de X: es decir que tenemos X_i con i de 1 a n. Se puede pensar en las diferentes mediciones como sismogramas de diferentes eventos tomados en diferentes estaciones, pero con la distancia fuente-estación igual; o en la exploración con fuentes activas se puede generar la misma fuente varias veces y registrar las ondas que genera. Ahora vamos a promediar estas n mediciones:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

¿Cuál es el valor esperado de $\bar{X}$, y su varianza?

Amontonamiento - valor esperado

Para calcular el valor esperado del promedio de las n mediciones, $\bar{X}$, consideremos

$$
\begin{aligned}
E[\bar{X}] &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] & \\
&= \frac{1}{n} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] & \text{usando la relación (1)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E[X_i] & \text{usando la relación (2)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu = \mu &
\end{aligned}
$$

Entonces el valor esperado del promedio $\bar{X}$ es el mismo que el valor esperado de cada medición individual. Eso no es una gran sorpresa.

Amontonamiento - varianza

La varianza en $\bar{X}$ considere la diferencia entre el promedio $\bar{X}$ y su valor esperado $E[\bar{X}]$:

$$Var(\bar{X}) = E\left[\left(\bar{X} - E[\bar{X}]\right)^2\right]$$

Para calcular su valor relativo a la varianza en una medición (σ^2), consideremos

$$\begin{aligned}
Var(\bar{X}) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) & \\
&= \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) & \text{usando la relación (3)} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) & \text{usando la relación (4)} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} &
\end{aligned}$$

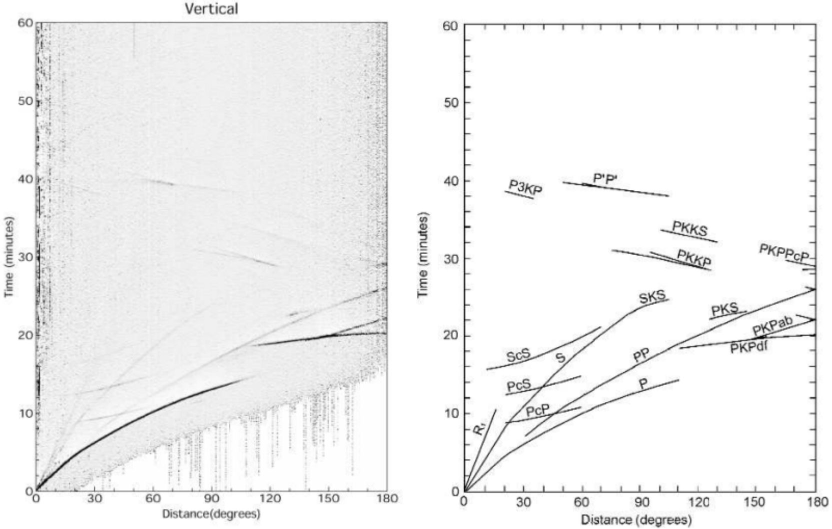
Entonces $Var(\bar{X})$, llamado la varianza en la muestra, se reduce por un factor de $1/n$ comparado con la varianza en la población de una sola medición.

Amontonamiento - conclusión

- En conclusión, $\bar{X}$, el promedio de las mediciones, es una estimación de μ que aumenta en precisión cuando aumentamos la cantidad, n, de mediciones: La desviación estándar del promedio de las n mediciones se reduce por un factor de $1/\sqrt{n}$.
- En términos prácticos, como ejemplo, el promedio de 100 mediciones independientes de una señal sísmica aumentaría la taza señal:ruido de las mediciones individuales por un factor de 10. Eso es el poder del principio de amontonamiento.

Amontonamiento - ejemplo (figura de Shearer)

Periodo corto, componente vertical.



Amontonamiento - preguntas

1. Usando su conocimiento de amontonamiento, explique las áreas blancas, negras y gris en la figura en la página anterior.

2. Asuma que la distribución de sismómetros en la Tierra es homogénea con 1 estación cada 1000×1000 km. Encuentre una expresión $N(\Delta)$ que estima la cantidad de instrumentos que registran un terremoto a una distancia epicentral entre Δ° y $(\Delta + 1)^\circ$. Calcule $N(\Delta)$ para $\Delta = 10,\ 45,\ 90,\ 180$.

3. Entonces, explique la estática en el señal a distancias cerca de 0° y 180°.

Amontonamiento - trabajo adicional

En parte de una clase práctica se puede ver visualmente el poder de amontonamiento para series de tiempo.

▸ https://www.mttmllr.com/ADSv2/sac_05_filters/ (sección 5.5)