Malt - Pauta. Aprox.

Geofísica de la Tierra Sólida 2014 - Certamen 2

2 horas

Importante: Hay que elegir 5 de las 7 preguntas de la sección A, y elegir 2 de las 4 preguntas en la sección B.

La sección A consta de 25 puntos y la sección B de 25 puntos.

Sección A [Elige 5 de las 7 preguntas. Todas las preguntas constan de 5 pts (=50% en total)]

A1) [5 pts]

En esta pregunta se puede usar la siguiente relación entre esfuerzo y deformación:

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} + 2\mu\epsilon_{ij}$$

Un fluido es comprimido por una presión de 100 [MPa] y su volumen cambia de 1000 a 995 [cm^3]. ¿Cuáles son los valores de sus constantes elásticas λ y μ?

fluido => $\mu = 0$

$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$

$-100\times10^6 = \lambda\left(\frac{\Delta V}{V}\right) = \lambda\left(\frac{-5}{1000}\right)$

$\lambda = \frac{100\times10^6\times1000}{5} = 2\times10^{10}$ [Pa]

A2) [5 pts]

En la teoría de rayos, los rayos están perpendiculares al frente de onda. ¿Qué representa el frente de onda? ¿Qué representa el rayo?

(+1) partículas mueven en fase

(mismo tiempo de viaje)

[2] Frente de onda: una superficie que está a fase ($k\cdot x - \omega t$) constante

[2] Rayo: Dirección de propagación de la onda (dirección de propagación de la energía) (+1)

A3) [5 pts]

Valores típicos para las velocidades de las ondas sísmicas (α, β) en la corteza (granito) son 5.8 y 3.3 [kms^{-1}]. Calcule el ángulo de incidencia de la onda S en la superficie de la Tierra que produce una onda P horizontal. => $\frac{\sin 90}{5.8} = \frac{\sin i}{3.3}$ [Snell]

=> $i = 34.7°$ (FÁCIL)

A4) [5 pts]

El terremoto de 2004 en Sumatra ($M_W = 9.2$) fue sentido miles de kilómetros lejos en Kuala Lumpur, Malasia, especialmente en edificios de muchos pisos. ¿Qué ondas sísmicas se sintieron? Dé razones. ONDAS SUPERFICIALES [2]

importante

① La energía de una onda de superficie solamente decae como 1/distancia [2]

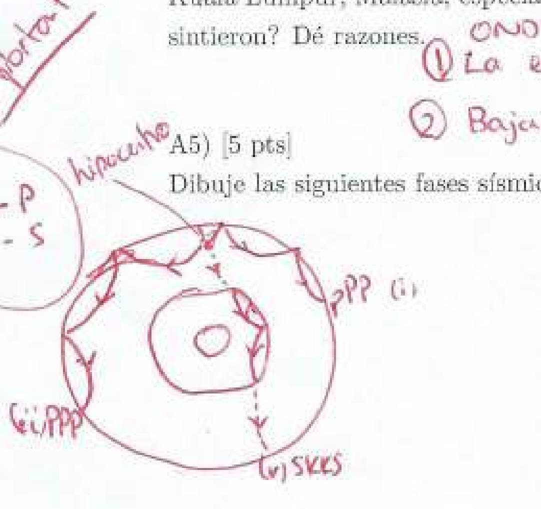
② Bajas frecuencias en las ondas superficiales causan resonancia en los edificios grandes [1]

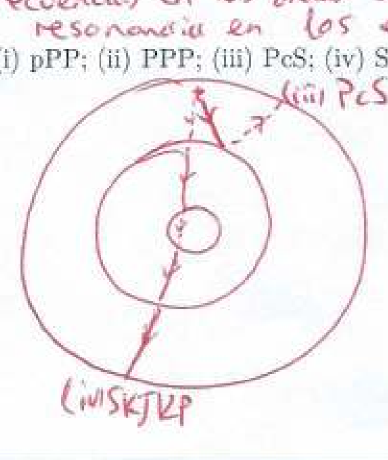
+ otros? (atenuación... sedimentos? observatorios?)

(FÁCIL)

A5) [5 pts]

Dibuje las siguientes fases sísmicas: (i) pPP; (ii) PPP; (iii) PcS; (iv) SKJKP; (v) SKKS.





Sección A [Elige 5 de las 7 preguntas. Todas las preguntas constan de 5 pts (=50% en total)]

(0,5) + 0,5 bonus all right

A6) [5 pts]
La ecuación de conducción térmica puede estar escrita como:

$$\rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + A \quad (5.3)$$

ρ densidad
C_p calor específico
T temperatura (t tiempo)
k conductividad térmica
A generación de calor (por radiactividad) ($W\,m^{-3}$)

"densidad" de fuentes de calor

(a) [3 pts] Explique que son los términos en esta ecuación.

(b) [2 pts] ¿En qué parte(s) de la Tierra se puede aplicar esta ecuación?

Donde hay conducción, NO convección [1]
⇒ en la litósfera [1] (acepto núcleo interno tb)

A7) [5 pts]
Tome la ecuación de conducción térmica (la ecuación 5.3 arriba) y suponga que:
(i) la temperatura varía solamente con la profundidad, $T = T(z)$
(ii) aumenta exponencialmente con la profundidad: $A(z) = A_0 e^{\alpha z}$

Muestre que, en el estado constante, el flujo de calor superficial es

$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$q|_{z=0} = Q_0 + \frac{A_0}{\alpha}$$

¿Qué representa la constante Q_0?

(recuerde que el flujo de calor hacia afuera es $q(z) = -k\frac{\partial T}{\partial z}$)

$$0 = k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + A_0 e^{\alpha z}$$

$$\int -k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,\partial z = \int A_0 e^{\alpha z}\,\partial z + cte.$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{A_0}{\alpha} e^{\alpha z} + cte.$$

en $z=0$

$$-k\frac{\partial T}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{A_0}{\alpha} + cte.$$

$$q|_{z=0} = \frac{A_0}{\alpha} + cte.$$

este constante, escrito Q_0, es el flujo de calor superficial SIN radiactividad

Sección B [Elige 2 de las 4 preguntas, 12.5 pts cada una (=50% en total)]

B1) [12.5 pts total]

La ecuación de movimiento en sismología puede estar escrita como:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \mu(\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}) \tag{4.24}$$

donde se puede escribir **u** en términos de un potencial escalar y un potencial vectorial

$$\mathbf{u} = \nabla\Phi + \nabla\times\mathbf{\Psi} \quad ; \quad \nabla\cdot\mathbf{\Psi} = 0 \tag{4.31}$$

(a) [1.5 pts] ¿Qué representa $\mathbf{u}(x, y, z, t)$? Desplazamiento de un punto en el medio (x,y,z) a un cierto tiempo (t) DESDE SU POSICIÓN DE EQUILIBRIO.

(b) [5 pts] Muestre que la ecuación de movimiento puede estar resuelta si Φ y $\mathbf{\Psi}$ satisfacen

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

y

$$\nabla^2\mathbf{\Psi} - \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2\mathbf{\Psi}}{\partial t^2} = 0$$

La siguiente identidad vectorial puede ayudar:

$$\nabla^2\mathbf{a} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{a}) - (\nabla\times\nabla\times\mathbf{a})$$

(c) [6 pts] Las soluciones para Φ, Ψ_x, Ψ_y y Ψ_z son ondas planas, por ejemplo:

$$\Phi = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$$

$(\bar{k}\cdot\bar{x} - \omega t) = (k_x x + k_y y + k_z z - \omega t) \Rightarrow \bar{k} = (k_x, 0, k_z)$, $\frac{\partial}{\partial y}(\ldots) = 0$

Para una onda plana viajando en el plano $x - z$, muestre que el movimiento particular de la onda P es perpendicular al movimiento particular de la onda SV.

(c) onda P (ϕ)

$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = Ak_x i e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)} = ik_x\phi$

$u_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$

$u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} = ik_z\phi$

$\therefore \bar{u}_p = (k_x, 0, k_z)i\phi$

$u_x \propto k_x$

$u_z \propto k_z$

onda SV (ψ_y)

$u_x = -\frac{\partial\psi_y}{\partial z} = -k_z i\psi_y$

$u_y = 0$

$u_z = \frac{\partial\psi_y}{\partial x} = k_x i\psi_y$

$\therefore \bar{u}_{sv} = (-k_z, 0, k_x)i\psi_y$

$\bar{u}_p\cdot\bar{u}_{sv} = \underbrace{(k_x, 0, k_z)\cdot(-k_z, 0, k_x)i^2\phi\psi_y}_{= -k_x k_z + k_z k_x = 0}$

$\Rightarrow$ PERPENDICULAR.

(b) $\rho\ddot{u} = (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\bar{u}) - \mu(\nabla\times\nabla\times\bar{u})$

$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\phi + \nabla\times\bar{\psi}) = (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot(\nabla\phi + \underbrace{\nabla\times\bar{\psi}}_{\text{div curl}=0})) - \mu(\nabla\times(\nabla\times(\underbrace{\nabla\phi}_{\text{curl grad}=0} + \nabla\times\bar{\psi})))$

$\rho\nabla\ddot{\phi} + \rho(\nabla\times\ddot{\bar{\psi}}) = (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla^2\phi) - \mu(\nabla\times[\nabla(\underbrace{\nabla\cdot\bar{\psi}}_{=0}) - \nabla^2\bar{\psi}])$ identidad vectorial

$\therefore$ simultáneamente hay que cumplir

(1) $\rho\nabla\ddot{\phi} = (\lambda+2\mu)\nabla(\nabla^2\phi)$

$\Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\phi$

(2) $\rho(\nabla\times\ddot{\bar{\psi}}) = \mu(\nabla\times\nabla^2\bar{\psi})$

$\Rightarrow \ddot{\bar{\psi}} = \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\bar{\psi}$

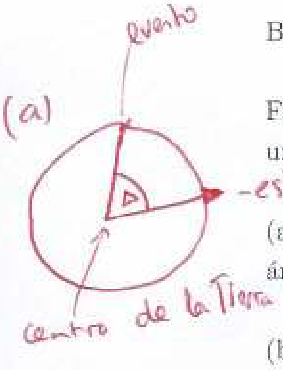
(medio tramposo, pero es cómo lo hago en los apuntes)

(d) cont.. $V_{MIN} \approx \frac{5000\ [km]}{11:34:00 - 11:02:00} = \frac{5000\ [km]}{1920\ [s]} \approx 2.6 \left[\frac{km}{s}\right]$

Sección B [Elige 2 de las 4 preguntas, 12.5 pts cada una (=50% en total)]

B2) [12.5 pts total]

(a)



Figuras B2a y B2b en la próxima página muestran un sismograma de tres componentes de un terremoto, y unas curvas de viaje para fases sísmicas para la Tierra.

(a) [1 pts] Para el imagen de las curvas de viaje, la distancia está dada en grados (Δ). ¿Qué ángulo representa Δ? $[1^\circ \approx 111\ km]$

(b) [2.5 pts] ¿Qué representan los tres ejes del sismograma T, R y Z?

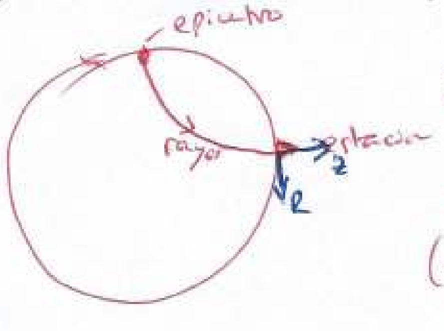
(c) [5 pts] Identifique las fases P y S en el sismograma y use las curvas de tiempo de viaje para estimar:

(i) La distancia entre el epicentro y la estación sísmica.

(ii) El tiempo de origen del terremoto.

(d) [4 pts] Use el sismograma y las respuestas a la parte (c) para estimar la velocidad mínima y la velocidad máxima de la onda Rayleigh.

(b)



Z : direccion vertical
R : direccion radial (direccion fuente → estacion)
T : dirección transversal, perpendicular al Z y R
(el rayo viaja en el plano (Z, R) para una Tierra con simetria radial)

(c) ver la hoja:

P (primero a llegar, componentes Z, R) llega a 11:10:00
S (primero a llegar componente trasversal) llega a ≈ ~~11:16:30~~ 11:16:30

=> $6\frac{1}{2}$ minutos entre P y S que corresponde a
(i) $\approx 45^\circ$ distancia
(ii) tiempo de origen ≈ 8 minutos antes de la onda P
=> a 11:02

(d) onda Rayleigh llega approx entre 11:28:30 y 11:34
distancia = 45 × 111 ≈ 5000 km

$V_{MAX} = \frac{[11:28:30] - [11:02:00]}{5000\ [km]}$ REVERT $\frac{1590\ [s]}{5000\ [km]}$ oops! $= \frac{5000\ [km]}{1590\ [s]} \approx 3.1 \left[\frac{km}{s}\right]$

*

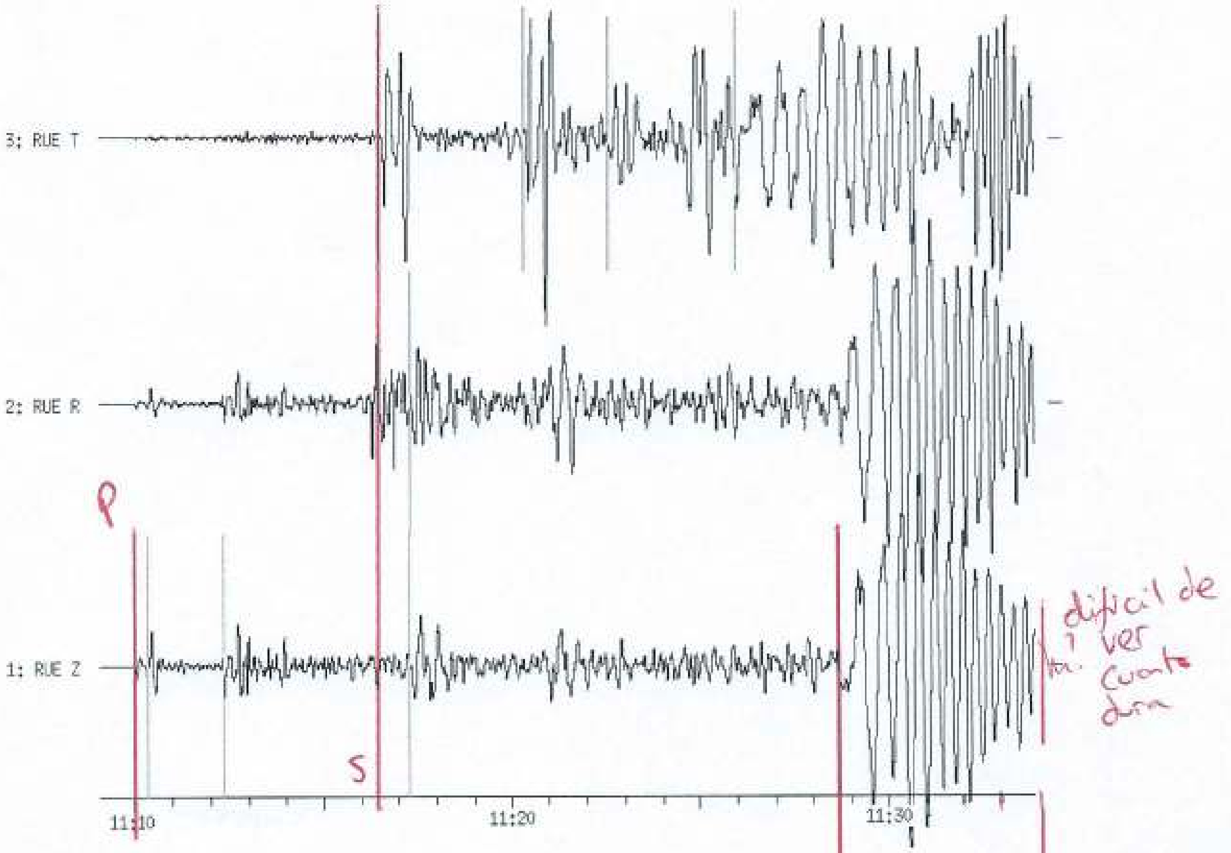


Fig B2a: Un sismograma de tres componentes. La escala horizontal esta en hora:minutos

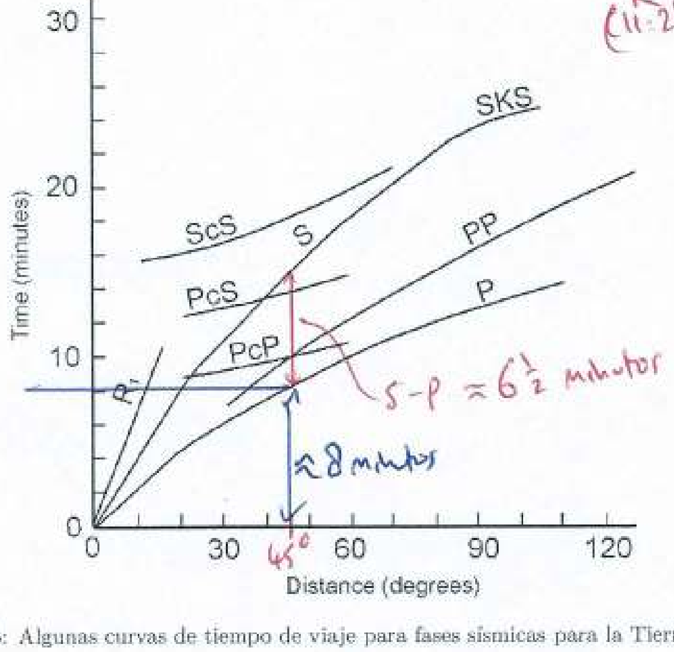


Fig B2b: Algunas curvas de tiempo de viaje para fases sísmicas para la Tierra.

Sección B [Elige 2 de las 4 preguntas, 12.5 pts cada una (=50% en total)]

B3) [12.5 pts total]

(a) [1.5 pts] Explique qué es un material viscoelástico y de un ejemplo.

→ Solido (ondas S) ($\mu \neq 0$) pero ductil (flujo convectivo lento en gran escalas de tiempo)

→ ASTENOSFERA

(b) [3 pts] Explique el concepto de la temperatura homóloga, y su valor para un medio (i) rígido, (ii) líquido y (iii) viscoelástico.

$$T_{hom} = \frac{T}{T_{fusion}}$$

$T_{hom} < 0,8 \Rightarrow$ rígido

$0,8 < T_{hom} < 1,0 \Rightarrow$ viscoelástico

$T_{hom} > 1,0 \Rightarrow$ líquido

(c) [2 pts] El coeficiente de Poisson se define como $\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$. Calcule su valor para material rígido (se puede suponer $\lambda = \mu$) y para material líquido.

rígido, $\sigma = 0,25$

líquido ($\mu = 0$) $\therefore \sigma = 0,5$

(Material viscoelástico típicamente tiene un valor σ entremedio de esos dos extremos).

(d) [6 pts] Use los siguientes datos de tiempo de viaje para estimar las velocidades sísmicas en el núcleo interno, y entonces el coeficiente de Poisson en el núcleo interno. Finalmente, estime la temperatura homóloga en el núcleo interno.

$$T\left(\mathrm{PKiKP}|_{\Delta=0^\circ}\right) = 992 \text{ [s]}$$

$$T\left(\mathrm{PKIKP}|_{\Delta=180^\circ}\right) = 1210 \text{ [s]}$$

$$T\left(\mathrm{PKJKP}|_{\Delta=180^\circ}\right) = 1668 \text{ [s]}$$

La siguiente información puede estar útil:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}}$$

$$r_{\text{nucleo interno}} = 1220 \text{ [km]}$$

$$T\left(\mathrm{PKIKP}|_{\Delta=180^\circ}\right) - T\left(\mathrm{PKiKP}|_{\Delta=0^\circ}\right) = \text{tiempo extra para que la onda P pasa el núcleo interno}$$

$$= \frac{2\, r_{\text{nucleo interno}}}{V_P \text{ (nucleo interno, promedio)}}$$

$$\therefore V_P = \frac{1220 \times 2 \text{ [km]}}{1210 - 992 \text{ [s]}} \simeq 11.2 \left[\frac{km}{s}\right] \quad \therefore \frac{\alpha}{\beta} = \frac{11.2}{3.6}$$

similarmente $$V_S = \frac{1220 \times 2 \text{ [km]}}{1668 - 992 \text{ [s]}} \simeq 3.6 \left[\frac{km}{s}\right]$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = 3.1$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\sigma = 2 - 2\sigma$$

$$2\sigma\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 1\right) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 2$$

$$\sigma = \frac{7.61}{2 \times 8.61} = 0.44 \Rightarrow \text{núcleo interno es viscoelástico.}$$

$$0,8 < T_{hom} < 1$$

Sección B [Elige 2 de las 4 preguntas, 12.5 pts cada una (=50% en total)]

B4) [12.5 pts total]

(a) Cambio de variables $T_1 \to 1$, $T_0 \to 0$

$\therefore \frac{v}{a}\frac{\partial T'}{\partial x'} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T'}{a^2\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{a^2\partial z'^2}\right)$

$\left(\frac{va}{\kappa}\right)\frac{\partial T'}{\partial x'} = \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2}\right)$

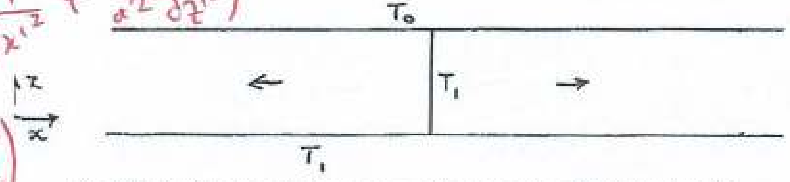


Fig B4: Modelo simple de placas oceánicas y una dorsal entremedio.

No, esta ok.

$T = (T_1 - T_0)T' + T_0$

$\partial T = (T_1 - T_0)\partial T'$

$\partial T = (1-0)\partial T'$

La ecuación que describe la distribución de temperatura en la litósfera oceánica es:

$$v\frac{\partial T}{\partial x} = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad (5.11)$$

$\partial T = \partial T'$

(κ es la difusividad térmica).

$x = ax'$ $\Rightarrow \partial x = a\partial x'$

(a) [3 pts] Muestre que un cambio de variables ($z = az'$, $x = ax'$, $T = (T_1 - T_0)T' + T_0$; entonces z' varía entre 0 y 1 a través de la capa y T' varía entre 1 y 0 a través de la capa) modifica la ecuación (5.11) a

$z = az'$ $\Rightarrow \partial z = a\partial z'$

$$Pe\frac{\partial T'}{\partial x'} = \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2}\right) \qquad (5.12)$$

velocidad de la placa

espesor de la placa

(b) [4 pts] El número de Peclet es $Pe = \frac{va}{\kappa}$. ¿Qué representan v y a? ¿Qué representa físicamente Pe? $\rightarrow$ $\frac{\text{transferencia de calor por advección}}{\text{transferencia de calor por difusión}}$, (es una tasa)

(c) [3 pts] La solución a la ecuación (5.12) que cumple las condiciones de borde, hecha en las clases, es

$$T'(x', z') = 1 - z' + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}e^{\left((Pe/2) - \sqrt{(Pe/2)^2 + n^2\pi^2}\right)x'}\sin(n\pi z') \qquad (5.20)$$

Modifique la ecuación (5.20) para escribirla en la forma $T'(t, z')$, donde t en esta instancia representa la edad de la placa oceánica.

$x = vt \;\therefore\; ax' = vt$

$\therefore\; x' = \frac{vt}{a}$ y listo.

(d) [2.5 pts] Entonces cuál es la distribución de temperatura en una placa oceánica muy vieja ($t \to \infty$). ¿Por qué el resultado no es una sorpresa?

con $t \to \infty$ $\Rightarrow$ exponencial $\rightarrow 0$ para todos n

$\Rightarrow T'(\cancel{x}\, t, z') = 1 - z'$

$\Rightarrow$ variación lineal entre la astenosfera y la superficie.

$\rightarrow$ estamos muy lejos de la dorsal $\Rightarrow$ no tiene influencia.