

Parte II

El Campo Gravitacional de la Tierra

El Campo Gravitacional de la Tierra

2.1 La Gravedad Global, los Potenciales, el Geoide

Introducción

La gravedad es usada en los estudios de los procesos dinámicos dentro de la Tierra, y también es importante en la geofísica de exploración. Las mediciones de gravedad son rápidas y baratas, y las variaciones en la aceleración gravitacional, g , nos dan la información del estado dinámico de la Tierra. Sin embargo, el estudio de la gravedad no es tan fácil, porque algunas correcciones son necesarias para separar la señal de procesos dinámicos y la teoría es difícil. Con respecto a determinar la estructura 3D de la Tierra, hay dificultades en la localización de las anomalías gravitacionales, en particular en la dirección radial.

La señal de gravedad tiene un origen complejo: La aceleración gravitacional es influenciada por la topografía, las variaciones de densidad dentro de la Tierra, y la rotación de la Tierra. En geofísica es necesario medir, caracterizar, e interpretar la señal de gravedad; siempre con respecto a una referencia específica en forma de una superficie equipotencial. Un ejemplo de una superficie equipotencial es el geoide.

El campo gravitacional

La ley de la atracción gravitacional fue formulada por Newton en 1687, que podía determinar las leyes de Kepler sobre las órbitas de los planetas.

En geofísica se puede definir la gravedad como la fuerza sobre una masa m debido a la combinación de (1) la atracción gravitacional de la Tierra, con masa M_E y (2) la rotación de la Tierra. La rotación tiene dos componentes: la aceleración centrífuga debido a la rotación con una velocidad angular ω , y la existencia del bulto ecuatorial.

La fuerza gravitacional entre dos partículas con masas M , en una posición \mathbf{r}_0 , y m , en una posición \mathbf{r} , separadas por una distancia r es una atracción entre una línea entre las partículas:

$$F = G \frac{Mm}{r^2}, \quad (2.1)$$

o, en forma vectorial:

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = -G \frac{Mm}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \hat{\mathbf{r}}'. \quad (2.2)$$

donde $\hat{\mathbf{r}}'$ es un vector unitario en la dirección de $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. El negativo significa que el vector de la fuerza, \mathbf{F} , está en la dirección hacia adentro (es decir, hacia M), pero el vector unitario está en la dirección hacia afuera. En nuestro caso ponemos M al origen de nuestro sistema de coordenadas (tomar \mathbf{r}_0 a $\mathbf{0}$) para simplificar las ecuaciones (es decir, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ y $\hat{\mathbf{r}}' = \hat{\mathbf{r}}$).

G es la constante de gravitación universal, $G = 6.673 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$, que tiene el mismo valor para todas las partículas. Podemos obtener la aceleración

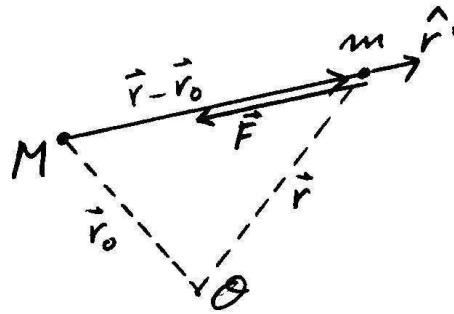
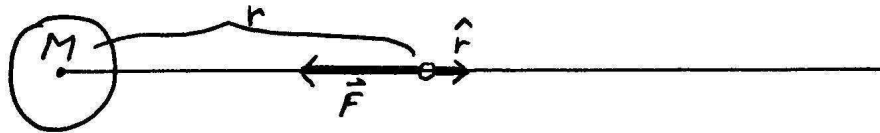


Diagrama vectorial que muestra la geometría de la atracción gravitacional.



El sistema de coordenadas simplificado.

gravitacional \mathbf{g} , o la fuerza sobre una masa unitaria debido a la gravedad, con la ley de movimiento de Newton. Si M es la masa de la Tierra:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{g} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad \text{y} \quad g = |\mathbf{g}| = G\frac{M}{r^2}. \quad (2.3)$$

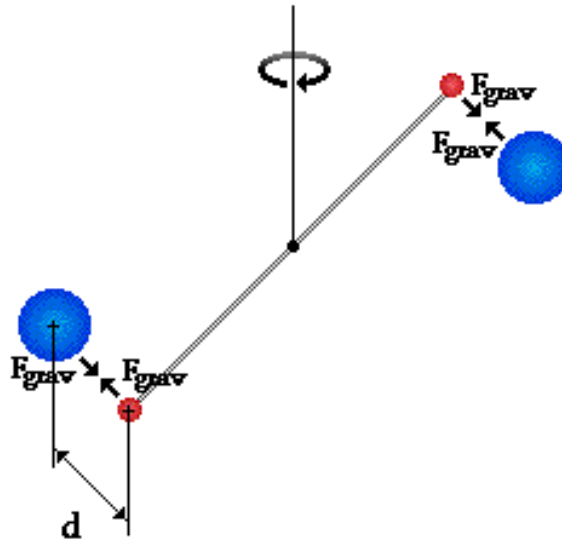
La aceleración g es la longitud del vector \mathbf{g} (la aceleración por unidad de masa) y por su definición es positiva. Definamos el vector \mathbf{g} como el campo gravitacional, y tomamos \mathbf{g} positivo hacia el centro de la Tierra, es decir en la dirección $-\mathbf{r}$.

La aceleración gravitacional, g , fue determinada inicialmente por Galileo; la magnitud de \mathbf{g} varía sobre la superficie de la Tierra pero es alrededor de 9.8 ms^{-2} . Siempre en geofísica la unidad de gravedad es el Gal ($1 \text{ Gal} = 1 \text{ cms}^{-2} = 0.01 \text{ ms}^{-2}$); las anomalías de la gravedad están expresadas en miliGal.

Cuando G fue determinado por Cavendish en 1778, la masa de la Tierra era determinada a dar una densidad promedio de $\rho \sim 5500 \text{ kgm}^{-3}$, que es bastante más grande que la densidad de las rocas en la superficie de la Tierra. Estas observaciones fueron unas de las primeras indicaciones de que la densidad debería aumentar hacia el centro de la Tierra. En los años posteriores a la medición de Cavendish, muchos valores de g fueron tomados en diferentes locaciones de la Tierra y la variación de g con la latitud se estableció. En 1800 científicos empezaron a analizar los valores de g de valores referenciales.

La balanza de torsión de Cavendish

El aparato de Cavendish para obtener G consistía en una barra de 2 metros con dos esferas pequeñas en cada extremo. Cuando gira la barra, hay una fuerza



La balanza de torsión de Cavendish.

proporcional a la rotación de la barra. Después, dos esferas grandes fueron puestas cerca de las esferas pequeñas y movió la barra hasta que la fuerza de torsión fuera igual a la fuerza de gravitación. Con F , m y M conocidos, se puede determinar G .

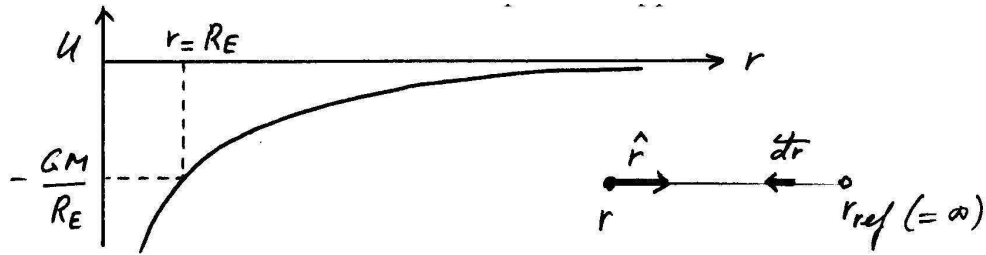
El potencial gravitacional

Debido a su posición en un campo gravitacional \mathbf{g} , generado por una masa M , cualquier masa m tiene energía potencial gravitacional. Se puede decir que esta energía es el trabajo W sobre una masa m (de la fuerza gravitacional debido a M) cuando movemos m de \mathbf{r}_{ref} a \mathbf{r} donde siempre $\mathbf{r}_{\text{ref}} = \infty$. El potencial gravitacional U es la energía potencial en el campo de M por unidad de masa. (En otras palabras, es el trabajo realizado por la fuerza gravitacional \mathbf{g} por unidad de masa). Se puede definir U positivo o negativo y siempre hay que cuidar de eso. El potencial es un campo escalar que es más fácil de manejar que un campo vectorial, y podemos derivar el campo vectorial del campo escalar fácilmente.

El campo de gravedad es un campo conservativo, así que exactamente como la masa m se ha movido de \mathbf{r}_{ref} a \mathbf{r} no es relevante; el trabajo hecho solamente depende de las posiciones iniciales y finales. Si seguimos la definición para el potencial negativo, tenemos para U :

$$U = \int_{\mathbf{r}_{\text{ref}}}^{\mathbf{r}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\mathbf{r}_{\text{ref}}}^{\mathbf{r}} \frac{GM}{r'^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = GM \int_{\infty}^r \frac{1}{r'^2} dr' = -\frac{GM}{r}. \quad (2.4)$$

Note que $\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = -dr$ porque $\hat{\mathbf{r}}$ y $d\mathbf{r}$ están en direcciones opuestas.



El potencial para la Tierra.

U representa el potencial gravitacional a una distancia r de una masa M . Note que se asume que $U(\infty) = 0$.

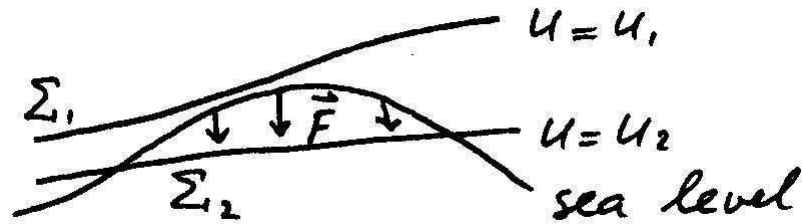
El potencial es la integración sobre el espacio del campo de gravedad. Entonces, el campo de gravedad (la fuerza de gravedad por unidad de masa), es la derivada espacial (el gradiente) del potencial:

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{GM}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U = -\text{grad}U = -\nabla U. \quad (2.5)$$

Se puede ver que, porque se define U negativo, cuando una masa m se acerca a la Tierra, su (energía) potencial decrece mientras su aceleración (debido a la atracción al centro de la Tierra) aumenta. La pendiente de esta curva es el valor de g .

Algunas propiedades generales de potenciales:

- El gradiente del campo escalar U es un vector que determina la tasa y dirección del cambio en U . Si una superficie equipotencial S es la superficie donde U es constante y \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son las posiciones en esta superficie (es decir $U_1 = U_2 = U$); la componente de g por S , que es $(U_2 - U_1)/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, es 0. Entonces $\mathbf{g} = -\nabla U$ no tiene un componente a lo largo de S y el campo es perpendicular a la superficie equipotencial.
- Dado que los fluidos no pueden soportar un esfuerzo cortante - la rigidez μ es cero - las fuerzas sobre la superficie de un fluido tienen que ser perpendiculares a esta superficie (en un estado estacionario), porque cualquier componente de una fuerza a lo largo de la superficie del fluido resultará en un flujo de líquido hasta que desaparece esta componente. La fuerza de restauración es $F = -m\nabla U$; la superficie de un fluido toma la forma de una superficie equipotencial.
- Para una Tierra con simetría radial el equipotencial será una esfera y \mathbf{g} tomará la dirección hasta el centro de la Tierra. Sin embargo, si el equipotencial es un elipsoide, $\mathbf{g} = -\nabla U$ no está en la dirección hacia $r = 0$.
- Usando potenciales, se puede mostrar que la aceleración gravitacional debido una distribución de masa con simetría esférica, en un punto fuera de



$F = -m\nabla U$ da la fuerza de restauración para nivelar la superficie del mar a una superficie equipotencial.

la masa, es la misma que si toda la masa esté al centro de la esfera.

El uso de campos potenciales para estudiar la estructura de la Tierra tiene algunas implicaciones:

1) Para un cuerpo con simetría esférica el potencial, y entonces la aceleración gravitacional \mathbf{g} , se determina solamente por la masa entre el punto de observación, r , y el centro de la masa. En coordenadas esféricas:

$$g(r) = -4\pi \frac{G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (2.6)$$

Esto es importante para entender la variación en g con r hacia dentro de la Tierra.

2) El potencial gravitacional no tiene toda la información sobre la distribución radial de la masa. Este genera un problema con las interpretaciones de gravedad no-únicas.

3) Si hay variaciones laterales en g sobre la superficie de una esfera (es decir que el equipotencial no es una esfera), hay una distribución de masa no-esférica, que puede ser por su forma o por la distribución interna de anomalías de densidad.

En la gravedad global tratamos de determinar y explicar las desviaciones de las superficies equipotenciales (o, más precisamente, la diferencia de la altura en superficies equipotenciales). Esta diferencia en la altura tiene relación con g local. Las superficies importantes de referencia son:

El geoide: La superficie actual que coincide con el nivel del mar (ignorando las mareas y otros efectos dinámicos en el mar).

El esferoide de referencia: La forma teórica de la superficie del mar (independiente en longitud y con una variación suave en latitud) que más se parece al geoide (o datos de gravedad observados). Esto forma la base del formulario internacional de gravedad que da g como una función de la latitud, que son los

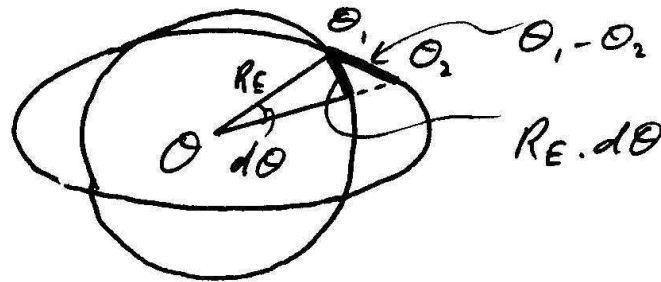
valores de referencia para reducir datos del campo gravitacional.

La forma hidrostática de la Tierra: Es aquella forma hipotética de la Tierra si sabemos su densidad ρ y velocidad angular ω .

Pronto investigaremos la forma del esferoide de referencia, que es importante para geodesia, e introduciremos los armónicos esféricos.

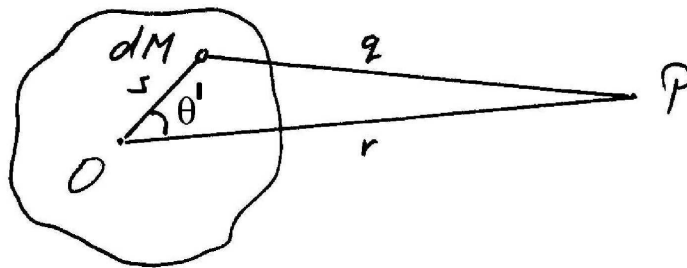
2.2 El Potencial Gravitacional debido a un cuerpo casi esférico

¿Cómo podemos determinar la forma del esferoide de referencia? El bulto ecuatorial de la Tierra fue descubierto y cuantificado a finales del siglo XVIII. Se noto que la distancia medida entre un grado de latitud, por ejemplo con un sextante, difiere del que se espera para una esfera: $R_E(\theta_1 - \theta_2) \neq R_E d\theta$, con R_E el radio de la Tierra, θ_1 y θ_2 dos diferentes latitudes,



Elipticidad de la Tierra medida por la distancia entre las latitudes de la Tierra y una esfera.

En 1743, Clairaut mostró que el esferoide de referencia también puede ser calculado directamente desde el campo de gravedad \mathbf{g} . La derivación se basa en el cálculo del potencial $U(P)$ en el punto P debido a un cuerpo esférico cercano, y es solamente válido para puntos fuera (o en el límite, sobre la superficie) del cuerpo.



El potencial U de un cuerpo no-esférico es calculado en un punto P , que está fuera de la masa $M = \int dM$; $OP = r$, la distancia del punto de observación al centro de la masa. Notemos que r es una constante, y s , q y θ' son variables. No hay rotación entonces $U(P)$ representa el potencial gravitacional.

La contribución dU al potencial gravitacional en P , debido a un elemento de masa dM a una distancia q desde P , está dada por

$$dU = -\frac{G}{q}dM \quad (2.7)$$

Típicamente, el potencial es expandido en una serie. Esto puede ser hecho de dos maneras, las cuales conducen al mismo resultado. Se puede escribir $U(P)$ directamente en términos de las soluciones conocidas de la ecuación de Laplace ($\nabla^2 U = 0$), los que son armónicos esféricos. Alternativamente, se puede expandir el término $\frac{1}{q}$ e integrar la serie resultante término por término. Aquí, haremos lo último, ya que da un mayor entendimiento del significado físico de los términos. Un tratamiento formal de las soluciones de los armónicos esféricos como soluciones de la ecuación de Laplace lo haremos después. La derivación discutida aquí conduce a la que es conocida como formula de MacCullagh, y muestra cómo las mediciones de gravedad por sí solas son usadas para definir el esferoide de referencia. Usando la ley de los cosenos podemos escribir $q^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta'$, entonces

$$dU = -\frac{G}{r \left[1 + \left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right) \cos \theta' \right]^{\frac{1}{2}}} dM \quad (2.8)$$

Podemos usar el teorema del binomio para expandir esta expresión en una serie de potencias de $\left(\frac{s}{r}\right)$.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{1}{2!}n(n-1)a^{n-2}b^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3 + \dots \quad (2.9)$$

para $\frac{b}{a} < 1$. Aquí tomamos $b = \left[\left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right) \cos \theta'\right]$ y $a = 1$. Entonces podemos escribir:

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{s}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{r}\right) \cos \theta' \right]^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r}\right)^2 + \left(\frac{s}{r}\right) \cos \theta' + \frac{3}{2} \left(\frac{s}{r}\right)^2 (\cos^2 \theta') + \text{t.o.m.} \\ &= 1 + \left(\frac{s}{r}\right) \cos \theta' + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) + \text{t.o.m.} \end{aligned} \quad (2.10)$$

y para el potencial:

$$\begin{aligned} U(P) &= \int_V dU = -\frac{G}{r} \int \left[1 + \left(\frac{s}{r}\right) \cos \theta' + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{r}\right)^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) \right] dM \\ &= -\frac{G}{r} \int dM - \frac{G}{r^2} \int s \cos \theta' dM - \frac{G}{2r^3} \int s^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) dM \end{aligned} \quad (2.11)$$

En las ecuaciones 2.10 y 2.11 hemos ignorado los términos de orden mayor (t.o.m.).

Reescribamos la ecuación 2.11 usando la identidad $\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta' = 1$:

$$U(P) = -\frac{G}{r} \int dM - \frac{G}{r^2} \int s \cos \theta' dM - \frac{G}{r^3} \int s^2 dM + \frac{3G}{2r^3} \int s^2 \sin^2 \theta' dM. \quad (2.12)$$

Podemos obtener conocimiento en la física si miramos cada término de la ecuación (2.12) separadamente:

1. $\frac{-G}{r} \int dM = -\frac{GM}{r}$ es esencialmente el potencial de una masa puntual M en O . Este término dominará para grandes valores de r ; a una grandísima distancia el potencial, debido a una distribución de densidad no-esférica, es cercano a un cuerpo esférico (es decir, una masa puntual en el origen O).
2. $\int s \cos \theta' dM$ representa un torque de masa \times distancia, el cual también es la base de la definición de centro de masa y $\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int r dM / \int dM$. En nuestro caso, hemos elegido O como el centro de masa y $\mathbf{r}_{\text{cm}} = \mathbf{0}$ con respecto a O . Otra manera de ver que esta integral debe desaparecer es darse cuenta que la integración sobre dM es esencialmente una integración sobre θ' , entre 0 y 2π , y que $\cos \theta' = -\cos(\frac{\pi}{2} - \theta')$. La integración sobre θ' toma a $s \cos \theta'$ a ambos lados de la línea entre O y P (dentro del cuerpo) con igual contribución de cada lado de O , dado que O está en el centro de masa.
3. $\int s^2 dM$ representa el torque de una distancia cuadrada y una masa, que es la base de la definición del momento de inercia (recuerde que para una esfera homogénea con radio R el momento de inercia es $0.4MR^2$). El momento de inercia es definido como $I = \int r^2 dM$. Cuando hablamos de momentos de inercia, se debe identificar el eje de rotación. Podemos entender el significado de la tercera integral introduciendo un sistema de coordenadas, x, y, z . Entonces $s = s(x, y, z)$; $s^2 = x^2 + y^2 + z^2$ para que $\int s^2 dM = \int (x^2 + y^2 + z^2) dM = 1/2[\int (y^2 + z^2) dM + \int (x^2 + z^2) dM + \int (x^2 + y^2) dM]$. Note que $A = \int (y^2 + z^2) dM$, $B = \int (x^2 + z^2) dM$ y $C = \int (x^2 + y^2) dM$ son los momentos de inercia alrededor de los ejes x, y, z respectivamente.

Con el momento de inercia definido alrededor de los ejes

$$\begin{aligned} \text{eje} - x &\rightarrow A = \int (y^2 + z^2) dM \\ \text{eje} - y &\rightarrow B = \int (x^2 + z^2) dM \\ \text{eje} - z &\rightarrow C = \int (x^2 + y^2) dM \end{aligned}$$

podemos reescribir el tercer termino en la ecuación (2.12):

$$-\frac{G}{r^3} \int s^2 dM = -\frac{G}{2r^3} (A + B + C) \quad (2.13)$$

4. $\int s^2 \sin^2 \theta' dM$. Aquí $s \sin \theta'$ proyecta \mathbf{s} sobre un plano perpendicular a OP y esta integral entonces representa el momento de inercia del cuerpo alrededor de OP . Este momento es a menudo denotado por I .

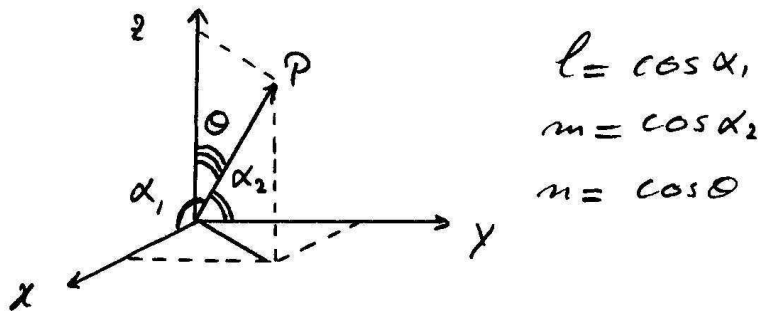
Entonces se puede escribir (2.12) como:

$$U(P) = -\frac{GM}{r} - \frac{G}{2r^3} (A + B + C - 3I) \quad (2.14)$$

que es conocida como la fórmula de MacCullagh.

A primera vista esto parece ser el resultado de una derivación fácil y directa, pero sí revela algunas propiedades interesantes e importantes del potencial y del campo relacionado. La ecuación (2.12) básicamente muestra que en ausencia de rotación la atracción gravitacional de un cuerpo irregular tiene dos contribuciones; la primera es la atracción de una masa puntual ubicada en el centro de gravedad, el segundo término depende de los momentos de inercia alrededor de los ejes principales, los cuales dependen completamente de la forma del cuerpo, o, más precisamente, de las desviaciones de la forma desde una esfera perfecta. Este segundo término decae como $\frac{1}{r^3}$, entonces a grandes distancias el potencial se aproxima al de una masa puntual y se vuelve menos y menos sensitivo a las variaciones no-esféricas en la forma del cuerpo. Esto simplemente implica que si están interesados en desviaciones a pequeñas escalas desde la simetría esférica no deberían estar lejos de la superficie: es decir, es mejor usar datos desde satélites con una órbita relativamente baja.

Podemos seguir el desarrollo de (2.14) notando que el momento de inercia I alrededor de cualquier eje en general (aquí OP) puede ser expresado como una combinación lineal de los momentos de inercia alrededor de los ejes principales. Sea l^2 , m^2 y n^2 los cuadrados de los cosenos del ángulo de la línea OP con los ejes x , y y z respectivamente. Con $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ podemos escribir $I = l^2A + m^2B + n^2C$



Cosenos directores.

Hasta ahora no hemos especificado la forma del cuerpo, pero para la Tierra es relevante considerar geometría rotacional así que $A = B \neq C$. Esto nos conduce a:

$$I = A + (C - A)n^2. \quad (2.15)$$

Aquí $n = \cos \theta$, con θ el ángulo entre OP y el eje- z , que es la co-latitud ($\theta = 90 - \lambda$, donde λ es la latitud).

$$I = A + (C - A) \cos^2 \theta \quad (2.16)$$

y

$$U(P) = -\frac{GM}{r} + \frac{G}{r^3}(C - A) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \quad (2.17)$$

Es costumbre escribir la diferencia en los momentos de inercia como una fracción J_2 de Ma^2 , con a el radio de la Tierra en el ecuador.

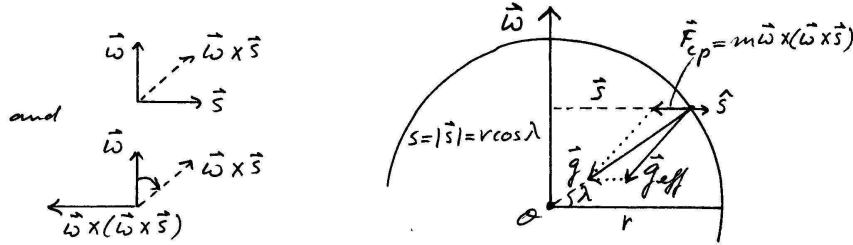
$$C - A = J_2 Ma^2 \tag{2.18}$$

entonces

$$U(P) = -\frac{GM}{r} + \frac{GJ_2 Ma^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \tag{2.19}$$

J_2 es una medida de elipticidad; para una esfera $C = A$, $J_2 = 0$ y el potencial $U(P)$ se reduce a la expresión del potencial gravitacional de un cuerpo con simetría esférica.

El paso final hacia el cálculo del campo de gravedad de referencia es agregar un potencial rotacional. Sea $\omega = \omega \hat{z}$ la velocidad angular de rotación alrededor del eje- z . La elección del marco de referencia es importante para obtener bien el signo más y menos. Una partícula que se mueve con la Tierra rotando está influenciada por una fuerza centrípeta $\mathbf{F}_{cp} = m\mathbf{a}$, la cual puede ser formalmente escrita en términos de un producto cruz entre la velocidad angular ω y el vector de posición como $m\omega \times (\omega \times \mathbf{s})$. Esto muestra que la aceleración centrípeta apunta al eje de rotación. La magnitud de la fuerza por unidad de masa es $s\omega^2 \cos \lambda$. La fuente de \mathbf{F}_{cp} es, de hecho, la atracción gravitacional \mathbf{g} (con $\mathbf{g}_{eff} + \mathbf{F}_{cp} = \mathbf{g}$). La gravedad efectiva $\mathbf{g}_{eff} = \mathbf{g} - \mathbf{F}_{cp}$. Dado que estamos principalmente interesados en la componente radial (la componente tangencial es muy pequeña) podemos escribir $g_{eff} = g - r\omega^2 \cos^2 \lambda$. En términos de potenciales, el potencial rotacional



La fuerza centrípeta.

tiene que ser agregado al potencial gravitacional $U_{gravedad} = U_{gravitacional} + U_{rot}$, con

$$U_{rot} = - \int r\omega^2 \cos^2 \lambda dr = -\frac{1}{2}r^2\omega^2 \cos^2 \lambda = -\frac{1}{2}r^2\omega^2 \sin^2 \theta \tag{2.20}$$

(el cual es, de hecho, exactamente lo opuesto a la energía cinética de rotación ($K = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}ms^2\omega^2$) por unidad de masa de un cuerpo rígido $-\frac{1}{2}\omega^2 s^2 = -\frac{1}{2}v^2$).

Ahora se puede escribir el geopotencial como:

$$U_{(r,\theta)} = -\frac{GM}{r} + \frac{GJ_2 Ma^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}r^2\omega^2 \sin^2 \theta \tag{2.21}$$

que describe la contribución al potencial debido a la masa central, la forma achatada de la Tierra (es decir, aplanamiento debido a la rotación), y la rotación misma.

Nosotros también podemos escribir el geopotencial en término de la latitud sustituyendo ($\sin \lambda = \cos \theta$):

$$U_{(r,\lambda)} = -\frac{GM}{r} + \frac{GJ_2Ma^2}{r^3} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \lambda - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} r^2 \omega^2 \cos^2 \lambda \quad (2.22)$$

Queremos usar este resultado para encontrar una expresión para el potencial gravitacional y g en la superficie del esferoide de referencia. El aplanamiento es determinado desde el geopotencial definiendo el equipotencial U_0 , la superficie con U constante.

Dado que U_0 es un equipotencial, U debe ser el mismo (U_0) para un punto en el polo y en el ecuador. Tomamos c para el radio polar y a para el radio ecuatorial y escribimos:

$$U_{0,polo} = U(c, 90) = U_{0,ecuador} = U(a, 0) \quad (2.23)$$

$$U_{polo} = -\frac{GM}{c} + \frac{G}{c^3} J_2 M a^2 \quad (2.24)$$

$$U_{ecuador} = -\frac{GM}{a} + \frac{G}{2a^3} J_2 M a^2 - \frac{1}{2} a^2 \omega^2 \quad (2.25)$$

y después de reordenar para aislar a y c tenemos

$$f \equiv \frac{a-c}{a} \approx \frac{3}{2} \left(\frac{J_2 M a^2}{M a^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{a \omega^2}{GM/a^2} = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} p \quad (2.26)$$

Lo cual básicamente muestra que el aplanamiento geométrico f , que está definido por la diferencia relativa entre el radio polar y ecuatorial, y está relacionado al coeficiente de elipticidad J_2 y la proporción p entre la componente de la gravedad rotacional ($a\omega^2$) y la gravitacional (GMa^{-2}) en el ecuador. El valor para el aplanamiento f puede ser determinado precisamente desde datos orbitales; de hecho, un año después de lanzar el primer satélite artificial, el valor pudo ser determinado con mucha más precisión que las estimaciones no-satelitales. El aplanamiento geométrico es pequeño ($f = 1/298.257 \approx 1/300$). La diferencia entre el radio ecuatorial y polar es entonces alrededor de $R_E f = 6371\text{km}/300 \approx 21\text{km}$.

En orden de obtener la forma del geode de referencia (o esferoide) se puede usar la suposición que la desviación de una esfera es pequeña, y podemos así asumir que el vector desde el centro de la Tierra hacia un punto en el geode de referencia tendrá la forma:

$$r_g \sim r_0 + dr = r_0(1 + \epsilon) \quad \text{o, con} \quad r_0 = a, r_g \sim a(1 + \epsilon) \quad (2.27)$$

Puede ser mostrado que ϵ puede ser escrito como una función de f y la latitud. Está dada por: $r_g \sim a(1 - f \sin^2 \lambda)$ y (usando una expansión binomial) $r_g^{-2} \approx a^{-2}(1 + 2f \sin^2 \lambda)$.

Las anomalías del geode son típicamente del orden de varias decenas de metros (con un máximo (absoluto) valor de ~ 100 m cerca de la India), el cual es pequeño (a menudo menor que 0.5%) comparado con la dependencia del radio con la latitud. Entonces el geode de referencia con $r = r_g$ de acuerdo con (2.27) es una buena representación del geode actual.

Finalmente, podemos determinar el campo de gravedad en las posiciones del geode de referencia calculando el gradiente de (2.22) y sustituyendo la posición r_g definido por (2.27). En coordenadas esféricas:

$$\mathbf{g} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \lambda}\right) \quad (2.28)$$

$$g = |\mathbf{g}| = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \lambda}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \sim \frac{\partial U}{\partial r} \quad (2.29)$$

porque $\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \lambda}$ es pequeño. Así podemos aproximar la magnitud del campo de gravedad por:

$$g = \frac{GM}{r^2} - 3\frac{GJ_2Ma^2}{r^4} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \lambda - \frac{1}{2}\right) - r\omega^2 \cos^2 \lambda \quad (2.30)$$

y, con $r = r_g \equiv a(1 - f \sin^2 \lambda)$,

$$g = \frac{GM}{a^2(1 - f \sin^2 \lambda)^2} - 3\frac{GJ_2Ma^2}{a^4(1 - f \sin^2 \lambda)^4} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \lambda - \frac{1}{2}\right) - a\omega^2(1 - f \sin^2 \lambda)^2 \cos^2 \lambda \quad (2.31)$$

o, con la expansión binomial dada por (2.27)

$$g(\lambda) = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2}J_2 - p\right) [1 + f' \sin^2 \lambda] \quad (2.32)$$

La ecuación (2.32) muestra que el campo de gravedad en el esferoide de referencia puede ser expresado como algún factor (que depende de la latitud) multiplicado por la aceleración de gravedad en el ecuador, g_{ec} , con

$$g_{ec(\lambda=0)} = \frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2}J_2 - p\right) \quad (2.33)$$

La información acerca del aplanamiento puede ser derivada directamente del cambio relativo de la gravedad desde el polo al ecuador:

$$g_{polo} = g_{ec}(1 + f') \Rightarrow f' = \frac{g_{polo} - g_{ec}}{g_{ec}} \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) es llamada el teorema de Clairaut. La ecuación cuadrática para la gravedad como una función de la latitud (2.32) forma la base para la fórmula de gravedad internacional. Sin embargo, esta referencia internacional para la reducción de los datos de gravedad está basada en una derivación que incluye algunos de los términos de orden superior. Una forma típica es

$$g = g_{ec}(1 + \alpha \sin(2\lambda) + \beta \sin^2(2\lambda)) \quad (2.35)$$

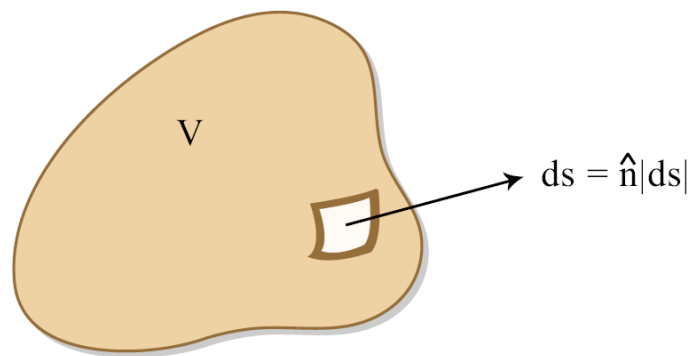
con los factores de proporcionalidad, α y β , dependiendo de G , M , ω , a y f . Los valores de esos parámetros están siendo determinados con mayor precisión por el incremento de la cantidad de datos satelitales. La expresión (2.35) es también una serie truncada. Otra expresión, cerrada, de la gravedad como función de la latitud está dada por la ecuación Somigliana:

$$g(\lambda) = g_{ec} \left[\frac{1 + k \sin^2 \lambda}{\sqrt{1 - e \sin^2 \lambda}} \right]. \quad (2.36)$$

Esta expresión ahora ha sido adoptada por el sistema geodésico de referencia, y forma la base para la reducción de datos de gravedad para el geoide de referencia (o esferoide de referencia) con $g_{ec} = 9.7803267714 \text{ ms}^{-2}$; $k = 0.00193185138639$; $e = 0.00669437999013$.

2.3 Las ecuaciones de Poisson y Laplace

La forma del campo gravitacional de la Tierra es causado por su densidad. La distribución de masa del planeta es inherentemente 3-dimensional, pero nosotros, los mortales, siempre arañamos solamente la superficie. Lo que más podemos hacer es medir la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra. Sin embargo, gracias a una relación fundamental conocida como Teorema de Gauss, el enlace entre una superficie observable y las propiedades del cuerpo entero en cuestión puede ser encontrado. El teorema de Gauss es uno de los de una clase de teoremas en análisis vectorial que relaciona diferentes tipos de integrales (de línea, de superficie, de volumen). Los teoremas de Stokes, Green y Gauss son fundamentales en el estudio de campos potenciales. El particularmente útil teorema debido a Gauss relaciona la integral sobre el volumen de alguna propiedad (generalmente, un tensor \mathbf{T}) con una integral de superficie. También es llamado el teorema de la divergencia. Sea V un volumen envuelto por una superficie S . Un pedazo de superficie dS puede ser representado por un vector apuntando hacia afuera con un largo correspondiente al área del elemento de superficie. En términos de un vector normal unitario, está dado por $\hat{\mathbf{n}}|dS|$.



La superficie alrededor de un volumen.

El teorema de Gauss es el siguiente:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} dS. \quad (2.37)$$

Veamos qué podemos deducir acerca del potencial gravitacional dentro de la Tierra usando solamente información obtenida en la superficie. Recordemos que

$$g = \frac{GM}{r^2} \quad y \quad \mathbf{g} = -\nabla U. \quad (2.38)$$

Supongamos que medimos \mathbf{g} en todas las partes de la superficie, y sumamos los resultados. Lo que obtenemos es el flujo del campo gravitacional

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.39)$$

En este punto, podemos predecir que si S es la superficie que encierra a la Tierra, el flujo del campo de gravedad debería ser diferente de cero, y aún más, que debería tener algo que ver con la distribución de densidad dentro del planeta. Esto es debido a que las líneas del campo gravitacional apuntan todas hacia el centro de la masa. Si el flujo fuera cero, el campo sería solenoidal. A diferencia del campo magnético, el campo de gravedad es esencialmente un monopolo. Para el campo magnético, las líneas de campo entran y salen de la superficie esférica ya que la Tierra tiene un polo positivo y negativo. El campo gravitacional es solamente solenoidal en regiones no ocupadas por masa. Empezaremos trabajando con la ecuación (2.39) y usando las ecuaciones (2.37) y (2.38)

$$\int_S \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{g} dV = - \int_V \nabla \cdot \nabla U dV = - \int_V \nabla^2 U dV. \quad (2.40)$$

Por otro lado, (usamos la definición del producto punto y la ecuación (2.38)):

$$\int_S \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = - \int_S g_n dS = -4\pi r^2 \frac{GM}{r^2} = -4\pi G \int_V \rho dV. \quad (2.41)$$

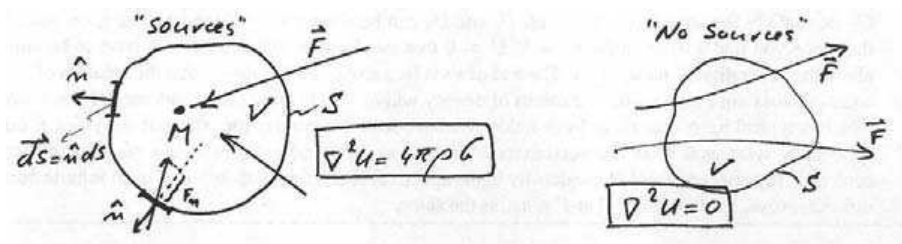
Hemos asumido que S es una superficie esférica, pero la derivación funcionará para cualquier superficie. Igualando las ecuaciones (2.40) y (2.41) podemos establecer que

$$\boxed{\nabla^2 U(\mathbf{r}) = 4\pi G \rho(\mathbf{r})} \quad \text{La ecuación de Poisson} \quad (2.42)$$

y en el caso en que estemos en un punto \mathbf{r} afuera de la masa

$$\boxed{\nabla^2 U = 0} \quad \text{La ecuación de Laplace} \quad (2.43)$$

La interpretación en términos de fuentes y sumideros de los campos potenciales y su relación con las líneas de campo están resumidas en la figura siguiente. La



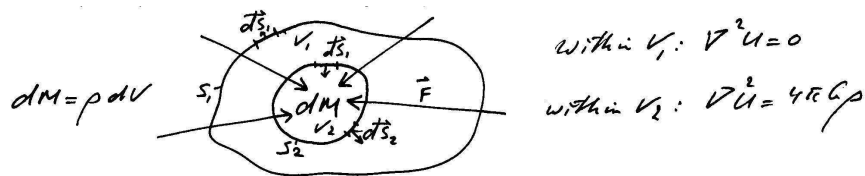
Las ecuaciones de Poisson y Laplace.

ecuación de Poisson es un resultado fundamental. Esto implica

1. que la masa total de un cuerpo (digamos Tierra) puede ser determinada de mediciones de $\nabla U = -\mathbf{g}$ en la superficie (ver ecuación (2.41)),
2. no es requerida información acerca de cómo exactamente la densidad está distribuida dentro de V , y

- que si no hay una fuente (o sumidero) de potencial encerrada por S la ecuación de Laplace sería aplicada para encontrar el potencial en un punto P afuera de la superficie S , que contiene toda la masa atractiva; por ejemplo, el potencial en la ubicación de un satélite. Pero en el límite, también es válida en la superficie de la Tierra. Similarmente, vemos que podemos usar la ecuación de Laplace para describir el campo magnético de la Tierra mientras estemos fuera de la región que contiene la fuente para el potencial magnético (es decir, el núcleo terrestre).

A menudo tenemos que buscar una solución para U de la ecuación de Laplace cuando sólo el valor de U , o sus derivadas $|\nabla U| = g$ son conocidos en la superficie de una esfera. Por ejemplo, si uno quiere determinar la distribución de masa interna de la Tierra desde los datos de gravedad, la ecuación de Laplace es más fácil de resolver que la ecuación de Poisson. En la práctica, uno puede (re)definir el problema de tal modo que se pueda usar la ecuación de Laplace integrando sobre las contribuciones de pequeños volúmenes dV (conteniendo la fuente del potencial dU , es decir, la masa dM), o usando la ley de Newton de la Gravedad con la ecuación de Laplace en un modo iterativo.



La aplicación de las ecuaciones de Poisson y Laplace.

2.4 Sistemas coordenados cartesianos y esféricos

En coordenadas cartesianas escribimos para ∇^2 (el Laplaciano)

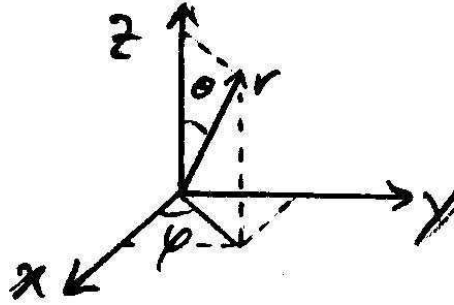
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.44}$$

Para la Tierra, es ventajoso usar coordenadas esféricas. Estas están definidas como:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad ; \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad ; \quad z = r \cos \theta \tag{2.45}$$

donde $\theta = 0 \rightarrow \pi =$ co-latitud, $\phi = 0 \rightarrow 2\pi =$ longitud.

Es muy importante darse cuenta que (mientras que el cuadro cartesiano está descrito por vectores unitarios inmóviles \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} , y los vectores unitarios \hat{r} , $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ son dependientes de la posición del punto. Ellos son ejes locales: en el punto P , \hat{r} apunta en la dirección del incremento del radio desde el origen, $\hat{\theta}$ en la dirección del incremento de la co-latitud θ , y $\hat{\phi}$ en la dirección del incremento de



r, θ, ϕ en un sistema de coordenadas esféricas.

la longitud ϕ . Uno puede ir entre los ejes coordenados por la transformación

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Aún más, necesitamos recordar que la integración sobre un elemento de volumen $dx dy dz$ se transforma, después de cambiar de variables, en $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$. Esto puede ser recordado por el hecho de que $r^2 \sin \theta$ es el determinante de la matriz Jacobiana, es decir, la matriz 3×3 llena con todas las derivadas parciales de la ecuación (2.45). Después de algo de álgebra, podemos finalmente escribir el Laplaciano esférico:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2.47)$$

Armónicos Esféricos

Trataremos de resolver la ecuación de Laplace, $\nabla^2 U = 0$, en coordenadas esféricas. La ecuación de Laplace es válida para campos de potencial fuera de las fuentes del campo. Recordemos cómo senos y cosenos (o en general, exponenciales) son a menudo soluciones para ecuaciones diferenciales, de la forma $\sin kx$ o $\cos kx$ donde k puede tomar cualquier valor entero. La solución general es cualquier combinación de senos y cosenos de todos los posibles k , con pesos que pueden ser determinados satisfaciendo las condiciones de borde (CB). La solución particular es construida buscando una combinación lineal de estas funciones bases con coeficientes de amplitud dictados por las CB: es una solución de una serie. En el caso cartesiano son las series de Fourier. En la teoría de Fourier, una señal, como una serie de tiempo $s(t)$ (por ejemplo un sismograma), puede ser representada por una superposición de funciones senos y cosenos, y las amplitudes pueden ser encontrados para que la superposición de los funciones senos y cosenos aproxima la señal con la mayor precisión posible (en un sentido de mínimos cuadrados).

Los armónicos esféricos son soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas: ellos son básicamente una adaptación del análisis de Fourier en

una superficie esférica. Tal como en las series de Fourier, la superposición de los armónicos esféricos puede ser usada para representar y analizar fenómenos físicos distribuidos sobre la superficie (o dentro) de la Tierra. Todavía en la analogía de la teoría de Fourier existe un teorema de muestreo, el cual requiere que existan suficientes datos para determinar la solución requerida. En geofísica, a menudo se habla acerca de la cobertura de datos, la cual debe ser adecuada.

Podemos buscar una solución para U de la ecuación de Laplace por el truco de separación de variables. Buscamos una solución con la siguiente estructura:

$$U = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \quad (2.48)$$

Tomemos cada factor separadamente.

Dependencia radial: $R(r)$

Las funciones que satisfacen la ecuación de Laplace pertenecen a una clase especial de funciones armónicas homogéneas. Una primera propiedad de las funciones homogéneas que podemos usar es que, en general, una función homogénea puede ser escrita en dos diferentes formas:

$$U_1(r, \theta, \phi) = r^l Y_l(\theta, \phi) \quad (2.49)$$

$$U_2(r, \theta, \phi) = \left(\frac{1}{r}\right)^{(l+1)} Y_l(\theta, \phi) \quad (2.50)$$

Esto nos da la forma de nuestra función radial:

$$R(r) = \left\{ \begin{array}{l} r^l \\ \left(\frac{1}{r}\right)^{(l+1)} \end{array} \right\} \quad (2.51)$$

Las dos alternativas $R(r) = r^l$ y $R(r) = r^{-(l+1)}$ describen el comportamiento de U para un campo externo y uno interno, respectivamente (dentro y fuera de la distribución de masa). Si usamos $R(r) = r^l$ o $R(r) = r^{-(l+1)}$ depende de las condiciones de borde. Si el problema requiere un valor finito para U en $r = 0$ entonces necesitamos usar $R(r) = r^l$. Sin embargo, si requerimos $U \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$ entonces tenemos que usar $R(r) = r^{-(l+1)}$. La última es apropiada para representar el potencial fuera de la superficie que encierra todas las fuentes del potencial. Tales como el potencial de gravedad $U = GM/r$. Sin embargo, ambas son necesarias cuando describimos el potencial magnético en el punto r debido a un campo interno y externo.

Dependencia longitudinal: $\Phi(\phi)$

La sustitución de la ecuación (2.48) en la ecuación de Laplace con $R(r)$ dada por la ecuación (2.51), y dividiendo por la ecuación (2.48), nos da una ecuación en la cual las derivadas de θ y de ϕ ocurren separadamente en los dos lados de la ecuación. Para θ y ϕ arbitrarios esto significa:

$$-\frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = \text{constante}, \quad (2.52)$$

el cual lo podemos resolver mejor llamando a la constante m^2 y resolviendo para Φ como:

$$\Phi(\phi) = A \cos m\phi + B \sin m\phi. \quad (2.53)$$

Todas las constantes A y B dan soluciones válidas, y m debe ser un entero positivo.

Dependencia latitudinal: $\Theta(\theta)$

La condición es similar, excepto que envuelve a ambos l y m . Reordenando, es posible llegar a

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta(\theta) \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta(\theta) = 0 \quad (2.54)$$

Esta es una ecuación trascendental bien conocida: es la ecuación asociada de Legendre. Resulta que el espacio de las funciones homogéneas tiene una dimensión $2l + 1$, entonces $0 \leq m \leq l$. Si hacemos $\cos \theta = \mu$, la ecuación (2.54) se transforma a

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 P}{d\mu^2} - 2\mu \frac{dP}{d\mu} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P = 0 \quad (2.55)$$

que está en una forma estándar y puede ser resuelta usando una variedad de técnicas. Comúnmente, las soluciones están expresadas como polinomios $P_l^m(\cos \theta)$. La ecuación asociada de Legendre se reduce a la ecuación de Legendre en el caso que $m = 0$. En este caso, la dependencia longitudinal no existe porque la ecuación (2.53) se reduce a una constante. Las funciones resultantes $P_l(\cos \theta)$ tienen una simetría rotacional alrededor del eje- z . Estas son llamadas funciones zonales.

Es posible encontrar expresiones de los polinomios de Legendre (asociados) que resumen su comportamiento como sigue:

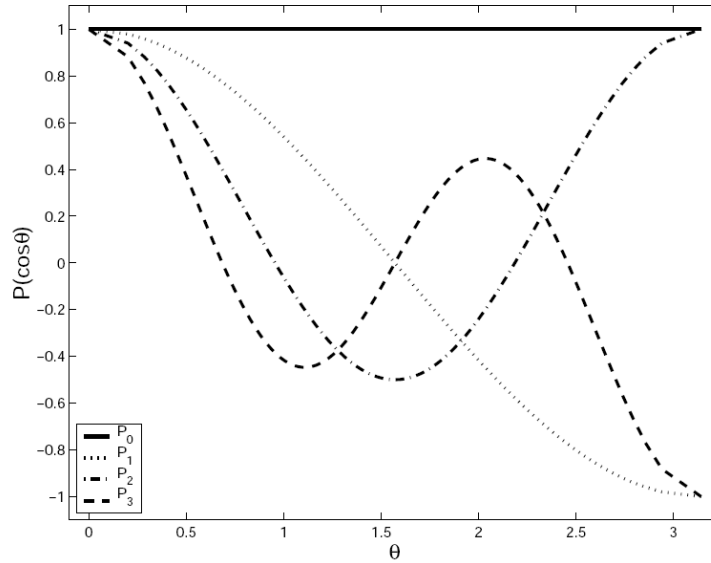
$$P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l \quad (2.56)$$

$$P_l^m(\mu) = \frac{1}{2^l l!} (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\mu^{l+m}} (\mu^2 - 1)^l, \quad (2.57)$$

escritas en términos de la $(l + m)$ -ésima derivada y $\mu = \cos \theta$. En la tabla y el gráfico que siguen están expresados los primeros polinomios de Legendre.

l	$P_l(\mu)$	$P_l(\theta)$
0	1	1
1	μ	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$	$\frac{1}{4}(3 \cos 2\theta + 1)$
3	$\frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$	$\frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta)$

La solución genérica en armónicos esféricos



Los polinomios de Legendre.

La solución genérica para U es encontrada combinando los comportamientos radial, longitudinal y latitudinal como sigue:

$$U(r, \theta, \phi) = \left\{ \begin{array}{l} r^l \\ (\frac{1}{r})^{(l+1)} \end{array} \right\} [A_l^m \cos m\phi + B_l^m \sin m\phi] P_l^m(\cos \theta) \quad (2.58)$$

Estos son llamados los armónicos esféricos sólidos de grado l y orden m . Los armónicos esféricos forman una base ortonormal. Podemos asumir que la solución completa está dada por una suma sobre todos los posibles índices l y m :

$$U(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left\{ \begin{array}{l} r^l \\ (\frac{1}{r})^{(l+1)} \end{array} \right\} [A_l^m \cos m\phi + B_l^m \sin m\phi] P_l^m(\cos \theta) \quad (2.59)$$

Las constantes necesitan ser determinadas de las condiciones de borde. Dado que los armónicos esféricos forman una base ortonormal, una función real arbitraria $f(\theta, \phi)$ puede ser expandida en términos de los armónicos esféricos por

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l [A_l^m \cos m\phi + B_l^m \sin m\phi] P_l^m(\cos \theta) \quad (2.60)$$

Visualización

Es importante visualizar el comportamiento de los armónicos esféricos. Alguna terminología que recordar es que sobre la base de los valores de l y m se identifican tres tipos de armónicos.

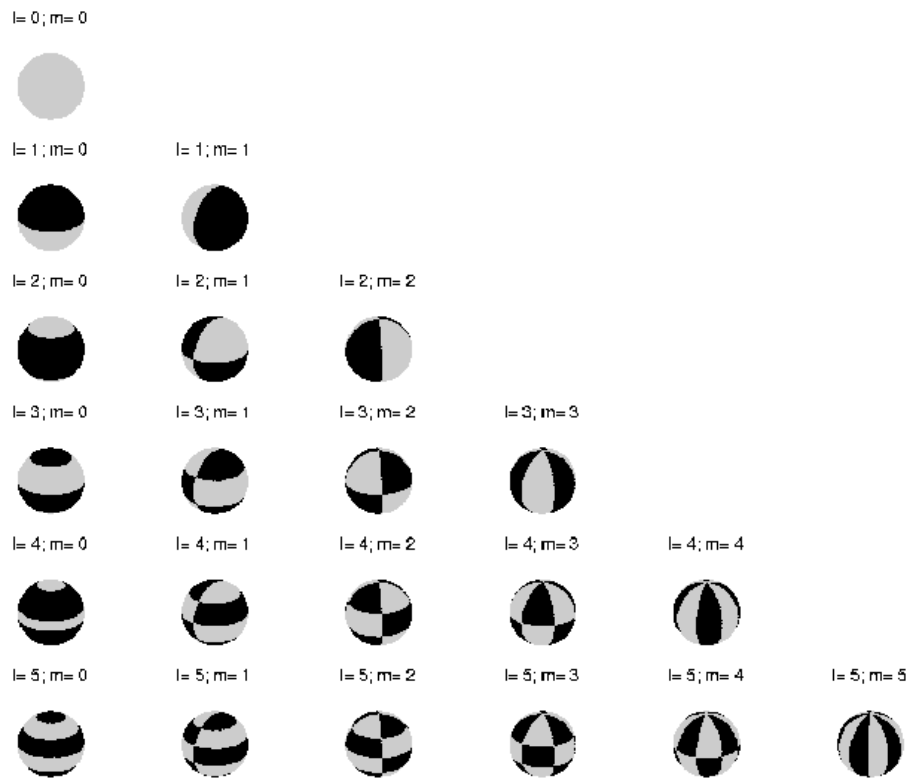
1. Los armónicos zonales tienen la forma $P_l^0(\cos \theta) = P_l(\cos \theta)$. La superposición de estos polinomios de Legendre describen variaciones con la latitud; no dependen de la longitud. Los armónicos zonales desaparecen ($U = 0$) en l pequeños círculos sobre el globo, dividiendo las esferas en zonas latitudinales.
2. Los armónicos sectoriales tienen la forma $\sin m\phi P_m^m(\cos \theta)$ o $\cos m\phi P_m^m(\cos \theta)$. Como desaparecen en $2m$ meridianos (líneas longitudinales, entonces m gran círculos), ellos dividen la esfera en sectores.
3. Los armónicos teserales tienen la forma $\sin m\phi P_l^m(\cos \theta)$ o $\cos m\phi P_l^m(\cos \theta)$ para $l \neq m$. La amplitud de un armónico esférico superficial de algún grado l y orden m desaparece en $2m$ meridianos de longitud y en $(l-m)$ paralelos de latitud.

En otras palabras, el grado l da el número total de líneas nodales y el orden m controla cómo este número está distribuido sobre los meridianos nodales y paralelos nodales. Con el grado (y orden) más alto, el detalle que se puede representar es más fino, pero incrementando l y m solamente tiene sentido si la cobertura de datos es suficiente para restringir los coeficientes de los polinomios.

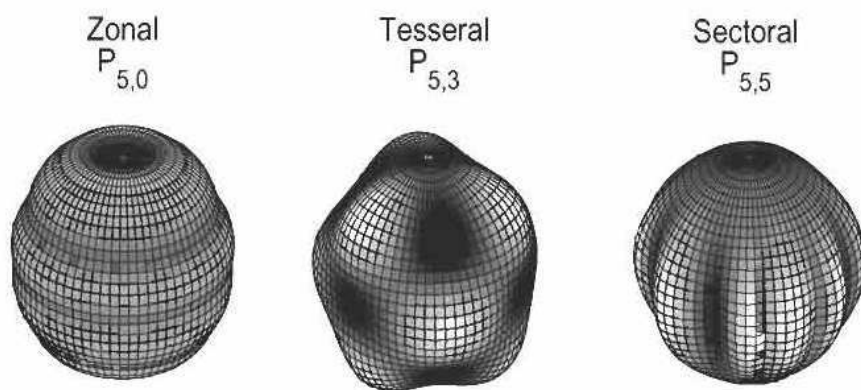
Finalmente, una propiedad importante que surge de la dependencia sobre la profundidad de la solución: desde la ecuación (2.59) podemos ver que (1) la amplitud de todos los términos decrecerán cuando la distancia desde el origen se incrementa (es decir la fuente interna del potencial) y que (2) la tasa de decaimiento se incrementa cuando el grado l aumenta.

Este tiene las siguientes consecuencias:

1. Con el incremento de la distancia los armónicos de orden menor son más dominantes ya que la señal de una estructura de pequeña escala (grande l y m) decae más rápidamente. Recordamos que las perturbaciones de las órbitas de los satélites restringen los ordenes menores con alta precisión. Los detalles finos a una profundidad son difíciles de discernir en la superficie de la Tierra (o más lejos en espacio) debido a la atenuación espacial.
2. Entonces, esto complica la continuación descendiente de $U(r, \theta, \phi)$ desde la superficie de la Tierra hacia radios menores, ya que este proceso introduce componentes de mayor grado en la solución que no están restringidas por datos en la superficie. (Este problema es importante en la continuación descendente del campo magnético hacia la frontera núcleo-manto).



Algunos armónicos esféricos.



Armónicos esféricos: zonal, teseral, sectoral.

2.6 Anomalías globales de gravedad

La Gravedad dentro y fuera de una lámina esférica de masa

La solución completa de la ecuación de Laplace está dada por (2.59). Hemos hablado de la elección de las funciones radiales. Dentro de la distribución de masa usamos

$$U^{in}(r, \theta, \phi) = \left\{ r^l \right\} [A_l^m \cos m\phi + B_l^m \sin m\phi] P_l^m(\cos \theta) \quad (2.61)$$

y fuera de ella usamos

$$U^{out}(r, \theta, \phi) = \left\{ \frac{1}{r^{l+1}} \right\} [A_l^m \cos m\phi + B_l^m \sin m\phi] P_l^m(\cos \theta) \quad (2.62)$$

Desde ahora, incorporaremos un factor de normalización con el radio a en el ecuador:

$$U^{out}(r, \theta, \phi) = -\frac{GM}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} [A_l^m \cos m\phi + B_l^m \sin m\phi] P_l^m(\cos \theta) \quad (2.63)$$

Entonces, en términos de un potencial superficial de armónicos esféricos $U(l)$ sobre un círculo unitario, obtenemos las siguientes ecuaciones para el campo dentro y fuera de una distribución de masa:

$$U^{in}(r, l) = \left(\frac{r}{a} \right)^l U(l) \quad (2.64)$$

$$U^{out}(r, l) = \left(\frac{a}{r} \right)^{l+1} U(l) \quad (2.65)$$

Para la gravedad esto queda como:

$$\mathbf{g}^{in}(r, l) = -\frac{l}{a^l} r^{l-1} U(l) \hat{\mathbf{r}} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{g}^{out}(r, l) = a^{l+1} (l+1) \frac{1}{r^{l+2}} U(l) \hat{\mathbf{r}} \quad (2.67)$$

¿Cuál es la gravedad debido a una delgada lámina de masa usando un armónico esférico de grado l ? Representemos esto como una lámina con un grosor infinitesimal, y llamemos $\sigma(l)$ la densidad de masa por unidad de área. De este modo podemos trabajar con un r constante y usar los resultados para simetría esférica. Sabemos, por la ley de Gauss, que el flujo a través de cualquier superficie, encerrando un poco de masa, es igual a la masa total encerrada ($-4\pi G$ veces). Construyendo una caja alrededor de un trozo de superficie \mathbf{S} con área dS , encerrando un poco de masa dM , podemos deducir que

$$g^{out} - g^{in} = 4\pi G \sigma(l) \quad (2.68)$$

Sobre esta lámina, dada por un radio a , podemos usar las ecuaciones (2.66) y (2.67) para encontrar $g^{out} = U(l)(l+1)/a$ y $-g^{in} = -U(l)l/a$, y resolver

para $U(l)$ usando (2.68) como $U(l) = 4\pi G\sigma(l)a/(2l + 1)$. Poniendo esto en las ecuaciones (2.66) y (2.67) nuevamente obtenemos para la gravedad dentro y fuera de esta distribución de masa:

$$g^{in}(r, l) = \frac{4\pi Gl}{2l + 1} \sigma(l) \frac{r^{l-1}}{a^{l-1}} \quad (2.68)$$

$$g^{out}(r, l) = \frac{4\pi G(l + 1)}{2l + 1} \sigma(l) \frac{a^{l+2}}{r^{l+2}} \quad (2.69)$$

Escalas de longitud

Las mediciones de la atracción gravitacional son útiles en la determinación de la forma y propiedades rotacionales de la Tierra. Esto es importante para la geodesia. Adicionalmente, también proveen información acerca de las variaciones de densidad no-esféricas en la litosfera y el manto (importante para el entendimiento de procesos dinámicos, interpretación de imágenes sísmicas, o para encontrar depósitos minerales). Sin embargo, antes de que las mediciones de gravedad puedan ser usadas para la interpretación hay que hacer algunas correcciones: la reducción de datos juega un importante rol en la gravimetría ya que la señal asociada a las estructuras en que estamos interesados es muy pequeña.

Podemos investigar las diferentes escalas de longitud y las probables fuentes involucradas usando armónicos esféricos. Si usamos una expansión del campo U de armónicos esféricos, podemos ver que la continuación del campo a diferentes radios y su dependencia sobre el grado l es la que controla el comportamiento de la solución a diferentes profundidades (o radios) (ecuación (2.63)). Con el aumento de r desde la fuente, la amplitud de los armónicos de superficie se vuelve menor, y el decaimiento en la amplitud (atenuación espacial) es mayor para grados mayores l (es decir, estructuras de menor escala).

Representación cartesiana contra representación esférica

Si trabajamos sobre una escala pequeña con anomalías locales de gravedad (por ejemplo, en geofísica de exploración) no es eficiente usar funciones globales sobre una esfera porque el número de coeficientes que son necesarios es muy grande. Por ejemplo, para obtener una resolución de una escala de longitud de 100 km (alrededor de 1°) es necesario expandir hasta el grado $l = 360$, el cual, con todas las combinaciones $0 < m < l$ involucra cientos de miles de coeficientes. En cambio, usamos series de Fourier. El concepto es similar a los armónicos esféricos. Una serie de Fourier es simplemente una superposición de funciones armónicas (seno y coseno) con diferentes frecuencias:

$$g_z = \text{cte.} \sin(k_x x) e^{-k_x z} = \text{cte.} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda_x}\right) e^{-\frac{2\pi z}{\lambda_x}} \quad (2.70)$$

O en una forma general

$$g_z = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{x_0}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{x_0}\right) \right] e^{-\frac{n\pi z}{x_0}} \quad (2.71)$$

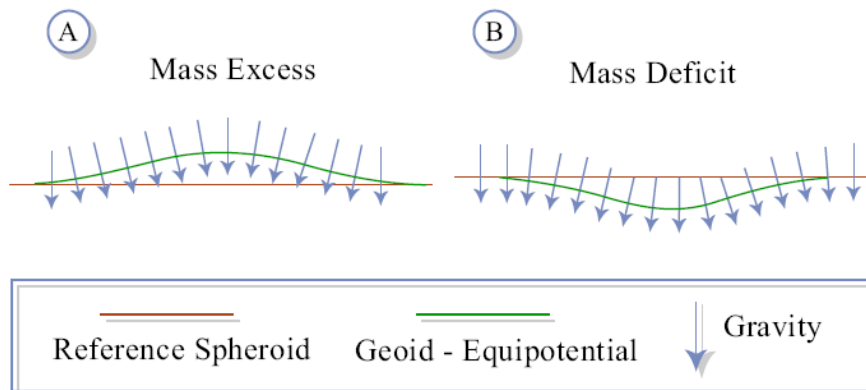
En esta expresión x_0 especifica el tamaño de una grilla en la cual las mediciones son hechas y la continuación del campo armónico a diferentes radios es controlada por una forma exponencial.

La tabla muestra una idea acerca de la relación entre las escalas de longitud, las regiones de probable fuente y donde las mediciones deben ser tomadas.

Longitud de onda λ	long. de onda corta ($\lambda < 1000$ km o $l > 36$)	long. de onda larga ($\lambda > 1000$ km o $l < 36$)
Región de la fuente	poco profunda; corteza, litósfera	probablemente profunda (manto inferior) pero una fuente poca profunda no puede ser excluida
Mediciones ¿cómo?, ¿dónde?	cerca de la fuente: superficie, nivel del mar, satélite con órbitas “bajas”, aviones	Grandes distancias desde el origen de las anomalías; perturbaciones de órbitas de satélites
Representación	grilla, series de Fourier 2D	armónicos esféricos
Sistema coordenado	cartesiano	esférico

2.7 Anomalías de la gravedad y reducción de datos de gravedad.

Asumamos que el geoide de altura N con respecto al esferoide es debido a una masa anómala dM . Si dM representa el exceso de masa, el equipotencial es movido hacia afuera y habrá un geoide con alguna altura ($N > 0$); en cambio, si dM representa un déficit de masa, $N < 0$ y habrá un geoide bajo.



Déficit de masa que lleva a la ondulación del geoide.

El geoide de altura N , en cualquier punto, depende del efecto total de los excesos y déficit de masa sobre la Tierra. N puede ser determinado únicamente en cualquier punto (θ, ϕ) desde las medidas de las anomalías de gravedad tomadas sobre la superficie de toda la Tierra, pero no es posible saber exactamente cómo es la distribución de la masa.

La combinación del campo de gravedad y la topografía nos da información importante sobre el estado mecánico de la corteza y la litosfera. Ambos, gravedad y topografía, pueden ser obtenidos por percepción remota y en muchos casos ellos forman la base de nuestro conocimiento del estado dinámico de los planetas, como Marte, y satélites naturales como la Luna. La reducción de datos juega un rol importante en los estudios de gravedad, ya que la señal causada por la variación no-esférica en la densidad es muy pequeña comparada no solamente con el campo observado, sino que también con otros efectos, tales como la influencia de la posición en el cual las mediciones son realizadas. La siguiente suma muestra las distintas componentes de la gravedad observada, con el nombre de las correspondientes correcciones que deberían ser hechas. Estas son mostradas entre paréntesis:

Gravedad observada = atracción del esferoide de referencia, MAS

- los efectos de la elevación sobre el nivel del mar (corrección del aire libre), la cual incluiría la elevación (anomalía del geoide) del nivel del mar sobre el esferoide de referencia
- el efecto de la atracción “normal” de masa entre el punto de observación y el nivel del mar (anomalía de Bouguer y corrección del terreno)
- el efecto de las masas que soportan las cargas topográficas (corrección isoestática)
- el cambio en la forma de la Tierra en relación con el tiempo (corrección de marea)
- el efecto de los cambios del término de rotación debido al movimiento del punto de observación (es decir, cuando las mediciones son hechas desde un barco en movimiento) (corrección de Eötvös)
- los efectos de las anomalías de la densidad de la corteza y el manto (“geología” o “procesos geodinámicos”)

Solamente las primeras cuatro correcciones serán discutidas aquí. La corrección de marea es pequeña, pero debe ser tomada en cuenta cuando se requieren datos con alta precisión. La aplicación de las diferentes correcciones es ilustrada por un simple ejemplo de una pequeña anomalía de densidad localizada en una topografía alta que está isoestáticamente compensada.

Anomalía del aire libre

Hasta ahora ha sido asumido que las mediciones a nivel del mar (es decir, el geoide actual) estaban disponibles. A menudo éste no es el caso. Si, por ejemplo, g es medido sobre la superficie de la Tierra en una altitud h se tiene que hacer la siguiente corrección:

$$dg_{FA} = -2\frac{hg}{r} \quad (2.72)$$

Para g a nivel del mar esta corrección equivale a $dg_{FA} = -0.3086h$ mgal o $0.3086h \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$ (h en metros). Notemos que esto supone que no hay masa entre el observador y el nivel del mar, de ahí el nombre corrección del “aire libre”. El efecto de la elipticidad es a menudo ignorado, pero se puede usar $r = R_{eq}(1 - f \sin^2 \lambda)$. Note: por metro de elevación esta corrección es igual a $3.1 \times 10^{-6} \text{ ms}^{-2} \sim 3.1 \times 10^{-7}g$; esto es sobre el límite de precisión que pueden ser alcanzadas por los instrumentos, lo cual muestra que las incertidumbres en la elevación son un factor limitante en la precisión que puede ser conseguida. (Una incertidumbre realista es 1 mgal).

Hay que estar seguro que la corrección es aplicada correctamente, dado que puede haber confusión acerca del signo de la corrección, el cual depende de la definición del potencial. El objetivo de la corrección es compensar la disminución

en la atracción de gravedad con el aumento de la distancia desde la fuente (centro de la Tierra). Formalmente, dado el signo menos en (2.73), la corrección debe ser restada.

La anomalía del aire libre es entonces obtenida por la corrección para alturas sobre el nivel del mar y por sustraer el campo de gravedad de referencia (en mgal)

$$\Delta g_{FA} = g_{obs} - dg_{FA} - g_0(\lambda) = (g_{obs} + 0.3086h) - g_0(\lambda) \quad (2.73)$$

(Notemos que debería haber una componente debido al hecho de que el nivel del mar (\equiv el geoide) no coincide con el esferoide de referencia; una corrección adicional puede entonces ser hecha para sacar la anomalía de gravedad extra. Se puede simplemente aplicar (2.73) y usar $h' = h + N$ para la elevación, lo cual es equivalente a agregar una corrección para $g_0(\lambda)$ así que éste representa el valor de referencia en el geoide. Esta corrección no es importante si la variación en el geoide es pequeña a través de la región de estudio ya que entonces la corrección es la misma para todos los datos puntuales).

Anomalía de Bouguer

La corrección del aire libre no corrige si hay alguna masa adicional entre el punto de observación y el nivel del mar. Sin embargo, sobre la Tierra a una cierta elevación, habrá una masa (incluso aunque a menudo es compensada). En lugar de estimar la verdadera forma de, digamos, una montaña sobre la cual la medición es hecha, a menudo se recurre a lo que es conocido como la “aproximación de placa (slab)” en la cual simplemente se asume que las rocas tienen una extensión horizontal infinita. La corrección de Bouguer está dada por

$$dg_B = 2\pi G\rho h \quad (2.74)$$

donde G es la constante gravitacional, ρ es la densidad promedio asumida de la roca en la corteza y h es la altura sobre el nivel del mar. Para $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-3}\text{s}^{-2}$ y $\rho = 2700 \text{ kgm}^{-3}$ obtenemos una corrección de $1.1 \times 10^{-6} \text{ ms}^{-2}$ por metro de elevación (o $0.11h$ mgal, h en metros). Si la aproximación de placa (slab) no es satisfactoria, por ejemplo cerca de la cima de la montaña, se tiene que aplicar una corrección de terreno adicional. Es correcto aplicar la corrección de terreno si se tiene acceso a datos de topografía/batimetría digital.

La corrección de Bouguer tiene que ser restada, dado que se quiere remover los efectos de una atracción extra. La corrección de Bouguer es habitualmente sustraída después de la aplicación de la corrección del aire libre. Ignorando la corrección de terreno, la anomalía de la gravedad de Bouguer está entonces dada por

$$\Delta g_B = g_{obs} - dg_{FA} - g_0(\lambda) - dg_B = \Delta g_{FA} - dg_B \quad (2.75)$$

En principio, con la anomalía de Bouguer hemos tomado en cuenta la atracción de todas las rocas entre el punto de observación y el nivel del mar, y Δg_B entonces representa la atracción gravitacional del material bajo el nivel del mar. Los mapas de la anomalía de Bouguer son típicamente usados para estudiar la gravedad en los continentes mientras que la anomalía del aire libre es comúnmente usada

en regiones oceánicas.

Isostasia y la corrección isostática

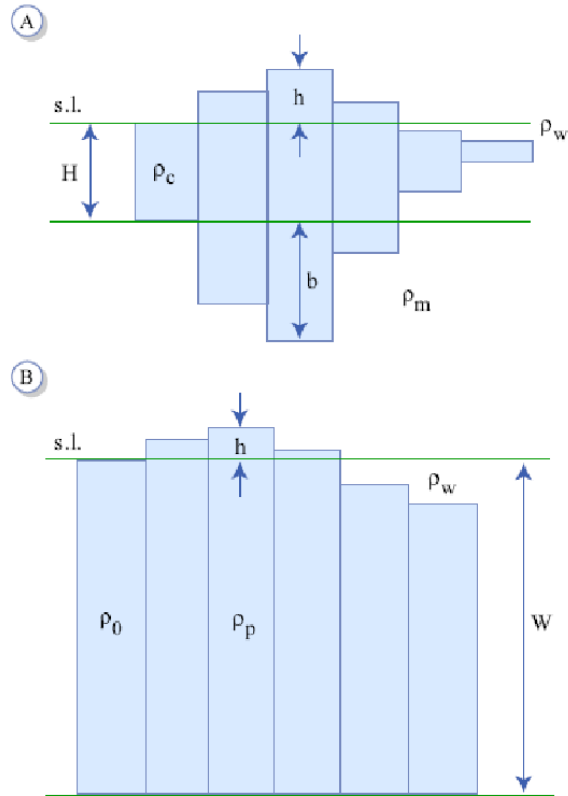
Si la masa entre el punto de observación y el nivel del mar es todo lo que contribuye a la gravedad medida, se esperaría que la anomalía del aire libre sea grande, y positiva sobre las alturas topográficas y que la anomalía de Bouguer decrezca a cero. Esta relación entre las dos anomalías de gravedad y la topografía debería ser obtenida en el caso en que la masa está completamente soportada por la fuerza de la placa (es decir, no hay compensación isostática). En las pasadas investigaciones de gravedad, sin embargo, se encontró que la anomalía de gravedad de Bouguer sobre cordilleras fue, sorpresivamente, grande y negativa. Aparentemente, un déficit de masa permanece después de que la masa sobre el nivel del mar fuera compensada. En otras palabras, ¡la corrección de Bouguer restaba demasiado! Esta observación en el siglo XIX condujo a Airy y Pratt a desarrollar el concepto de isostasia. Isostasia significa que a mayores profundidades que una cierta profundidad de compensación las variaciones observadas en la altura sobre el nivel del mar no contribuirá más a las variaciones laterales en la presión. En el caso de la isostasia de Airy esto es logrado por una raíz de compensación tal que la profundidad de la interfase entre la masa en la superficie (con una densidad constante) y el resto del manto varía. Esto es, de hecho, la ley de Arquímedes, y un buen ejemplo de este mecanismo es el iceberg flotante, de los cuales vemos solamente la cima sobre el nivel del mar. En el caso de isostasia de Pratt la profundidad de compensación no varía y la presión constante es obtenida por variaciones laterales de densidad. Ahora es sabido que ambos mecanismos juegan un rol. La ecuación básica que describe la relación entre la altura topográfica y la profundidad del cuerpo compensador es:

$$H = \frac{\rho_c h}{\rho_m - \rho_c} \quad (2.76)$$

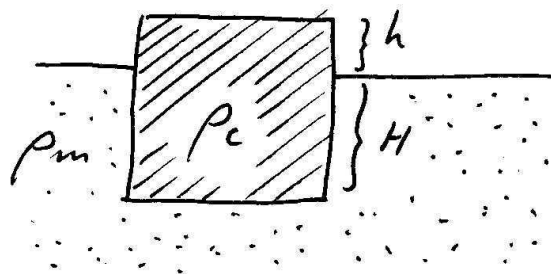
Asumiendo la isostasia de Airy y alguna densidad constante para la roca de la corteza se puede calcular $H(x, y)$ de la conocida topografía (digital) $h(x, y)$ y así corregir el déficit de masa. Esto resulta en la anomalía isostática. Si todo esto es hecho correctamente la anomalía isostática representa la pequeña señal debido a la anomalía de densidad que no es compensada (geología local o procesos geodinámicos).

2.8 Correlación entre anomalías de gravedad y topografía.

La correlación entre las anomalías de Bouguer y del aire libre por un lado y la topografía por el otro, contiene información hasta qué nivel la topografía es isostáticamente compensada. En el caso de la isostasia de Airy es obvio que la raíz de compensación causa un déficit de masa que resulta en una anomalía negativa de Bouguer. Si la topografía es compensada el exceso de masa sobre el nivel del mar es cancelado por el déficit de masa bajo él y como consecuencia la anomalía del aire libre es pequeña; usualmente, no es cero ya que la masa



Isostasia de Airy y Pratt.



Isostasia de Airy

adicional está cerca del punto de observación y es así menos atenuada que la señal compensadora del déficit de masa, así que alguna correlación entre la anomalía del aire libre y la topografía puede quedar.

Aparte de este efecto (el cual también juega un rol cerca de los bordes de las características topográficas), la anomalía del aire libre está cerca de cero y la anomalía de Bouguer es grande y negativa cuando esta topografía está completamente compensada isostáticamente (también llamado a estar “en equilibrio isostático”). En el caso de que la topografía no es compensada, la anomalía del aire libre es grande y positiva, y la anomalía de Bouguer es cero. (Esto también depende del largo de escala del peso y la resistencia de la placa soportadora).

Si un peso topográfico puede ser compensado o no, depende mayormente de la resistencia (y del grosor) de la placa soportadora y del largo de escala de la carga. Intuitivamente, es obvio que los pequeños objetos no son compensados ya que la placa litosférica es suficientemente fuerte para llevar el peso. Eso explica por qué los cráteres de impacto pueden sobrevivir sobre largos periodos de tiempo. (Cráteres grandes deben ser isostáticamente compensados, pero los bordes estrechos del cráter no desaparecerán por flujo). En contraste, peso adicional (la carga) sobre grandes regiones, es decir, mucho más grande que la distancia a la profundidad de compensación, resulta en el desarrollo de una raíz de compensación. Es también obvio por qué la resistencia (viscosidad) de la placa entra en la ecuación. Si la viscosidad es muy baja, el equilibrio isostático puede ocurrir incluso para pequeños cuerpos (considere, por ejemplo, un iceberg flotante). Discutiremos la relación entre las anomalías de gravedad y la topografía en detalle (teórico) más adelante. También veremos cómo la viscosidad le agrega dependencia temporal al sistema. Esto es fácil de entender intuitivamente; baja resistencia significa que el equilibrio isostático puede ocurrir casi instantáneamente (iceberg), pero para viscosidades mayores el tiempo de relajación es mucho mayor. La tasa de flujo del material bajo la placa soportadora determina cuán rápido esta placa puede asumir el equilibrio isostático, y esta tasa de flujo es una función de la viscosidad. Para viscosidades grandes, cuando se pone o saca peso, resulta en un retraso debido a la viscosidad; por ejemplo, el rebote después de un deshielo.

2.9 Flexión y gravedad.

La flexión de la litosfera, combinada con su gran resistencia, es, de hecho, uno de los mecanismos de compensación para la isostasia. Cuando discutimos de isostasia vimos que la profundidad hasta el suelo de la raíz, el cual es menos denso que la roca de alrededor a la misma profundidad, puede ser calculada con el principio de Arquímedes: si el material de la corteza con densidad ρ_c reemplaza material más denso del manto con densidad ρ_m una cordillera con altura h tiene una raíz compensadora con grosor H

$$H = \frac{h\rho_c}{\rho_m - \rho_c} \quad (2.77)$$

Este tipo de compensación también es llamado isostasia de Airy. No cuenta para alguna resistencia de la placa. Sin embargo, es obvio que la depresión H

decrece si la resistencia (o la rigidez de la flexión) de la litosfera aumenta. La consideración de una resistencia litosférica para cálculos basados en isostasia es importante en particular para el aumento de peso sobre una escala de tiempo no muy larga. Un elegante y útil modo de cuantificar el efecto de la flexión es considerando la flexión debido a un peso periódico. Consideremos un peso periódico debido a la topografía h con una amplitud máxima h_0 y una longitud de onda λ : $h = h_0 \sin(2\pi x/\lambda)$. El correspondiente peso está dado por

$$V(x) = \rho_c g h_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (2.78)$$

entonces la ecuación de la flexión viene a ser

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + (\rho_m - \rho_c) g w = \rho_c g h_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (2.79)$$

con D la rigidez de la flexión. La solución puede ser mostrada como

$$w(x) = \frac{h_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)}{\left\{ \frac{\rho_m}{\rho_c} - 1 + \frac{D}{\rho_c g} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4 \right\}} = w_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (2.80)$$

De la ecuación (2.80) podemos ver que para una rigidez de la flexión grande (un grosor muy grande de la placa) el denominador predominará en la ecuación y la desviación se hará pequeña ($w \rightarrow 0$ para $D \rightarrow \infty$); en otras palabras, la carga no hace una depresión. Lo mismo es cierto para longitudes de onda cortas, es decir, para $\lambda \ll 2\pi(D/\rho_c g)^{1/4}$. En contraste, para longitudes de onda muy largas ($\lambda \gg 2\pi(D/\rho_c g)^{1/4}$) para una muy débil (o delgada) placa la depresión máxima se vuelve

$$w_0 \approx \frac{\rho_c h_0}{\rho_m - \rho_c} \quad (2.81)$$

la cual es la misma que para una masa completamente compensada (ver ecuación (2.77)). En otras palabras, la placa “no tiene resistencia” para cargas con longitudes de onda largas.

La importancia de esta formulación es evidente si nos damos cuenta que cualquier topografía puede ser descrita por una serie (de Fourier) de funciones periódicas con diferentes longitudes de onda. Se puede usar, entonces, análisis de Fourier para investigar la depresión o compensación para cualquier forma de carga.

La ecuación (2.80) puede ser usada para encontrar expresiones para la influencia de la flexión sobre las anomalías del aire libre y de Bouguer. Las anomalías de gravedad dependen de la rigidez de la flexión en una forma bastante parecida como lo es para la desviación en la ecuación (2.80).

La anomalía de gravedad del aire libre:

$$\Delta g_{FA} = 2\pi \rho_c G \left\{ 1 - \frac{e^{-2\pi b_m/\lambda}}{1 + \frac{D}{(\rho_m - \rho_c)g} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4} \right\} h_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (2.82)$$

La anomalía de gravedad de Bouguer:

$$\Delta g_B = \frac{-2\pi\rho_c G e^{2\pi b_m/\lambda}}{1 + \frac{D}{(\rho_m - \rho_c)g} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4} h_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \quad (2.83)$$

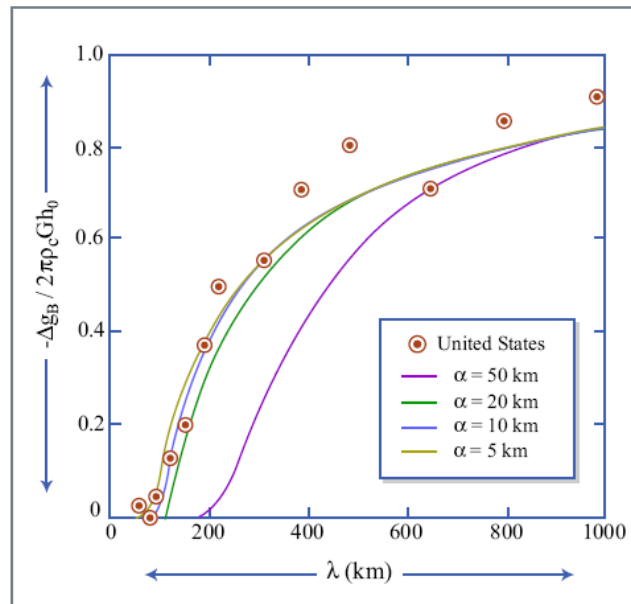
donde b_m es la profundidad al Moho (es decir, a la interfase deprimida entre ρ_c y ρ_m) y la exponencial en el numerador cuenta el hecho que para esta interfase está a una cierta profundidad (este factor controla, de hecho, la continuación radial).

Lo importante para recordar es la relación lineal con la topografía h y la proporcionalidad con D^{-1} . Se puede seguir un razonamiento similar al de arriba para mostrar que para las longitudes de onda cortas la anomalía de aire libre es grande (y positiva) y la anomalía de Bouguer es casi cero. Esto puede ser explicado por el hecho de que la flexión es entonces despreciable así que la corrección de Bouguer remueve exitosamente toda la estructura anómala. Sin embargo, para cargas de longitudes de onda largas, la carga está completamente compensada entonces después de corregir hasta elevación cero; la corrección de Bouguer aún “siente” la raíz de baja densidad (la cual no fue corregida). La anomalía de Bouguer es grande y negativa para una carga completamente compensada. Isostasia completa significa también que no hay una diferencia de masa neta así que la anomalía de gravedad de aire libre es muy pequeña (prácticamente cero). Mediciones de gravedad, entonces, contienen información acerca del grado de compensación isostática.

La correlación entre la topografía y las anomalías de Bouguer medidas pueden ser modeladas usando la ecuación (2.83) y esto da información acerca de la rigidez de flexión, y así del grosor (¡efectivo!) de una placa elástica. El diagrama siguiente muestra una anomalía de Bouguer como una función de la longitud de onda (es decir, la topografía está sometida a una transformación de Fourier). Muestra que topografía con longitudes de onda menores que alrededor de 100 km no es compensada (la anomalía de Bouguer es cero). Las curvas sólidas son las predicciones de acuerdo con la ecuación (2.83) para diferentes valores del parámetro flexural α . Los parámetros usados para esas curvas teóricas son $\rho_m = 3400 \text{ kgm}^{-3}$, $\rho_c = 2700 \text{ kgm}^{-3}$, $b_m = 30 \text{ km}$, $\alpha = [4D/(\rho_m - \rho_c)g]^{1/4} = 5, 10, 20 \text{ y } 50 \text{ km}$. Hay una considerable variación, pero un valor para α de alrededor de 20 parece ajustarse a las observaciones bastante bien, la cual, con $E = 60 \text{ GPa}$ y $\sigma = 0.25$, da un grosor elástico efectivo $h \sim 6 \text{ km}$.

2.10 El rebote post-glacial y la viscosidad

Hasta este punto consideramos la flexión de la litosfera elástica debido a cargas de peso, por ejemplo por montes submarinos. Para determinar la desviación $w(x)$ usamos el principio de isostasia, y para este principio necesitamos que el manto bajo la litosfera pueda fluir. Entonces, si sabemos la historia de las cargas, y la desviación como una función de tiempo, $w(x, t)$, podemos investigar el flujo del manto bajo la litosfera. La tasa del flujo depende de la viscosidad del material del manto, y la viscosidad tiene una parte importante en el conocimiento de la dinámica del manto. Se puede definir la viscosidad dinámica como la proporción



Anomalías de Bouguer y la topografía.

de esfuerzo (stress) y la tasa de la deformación (strain), con unidades de Pascal segundo [Pas].

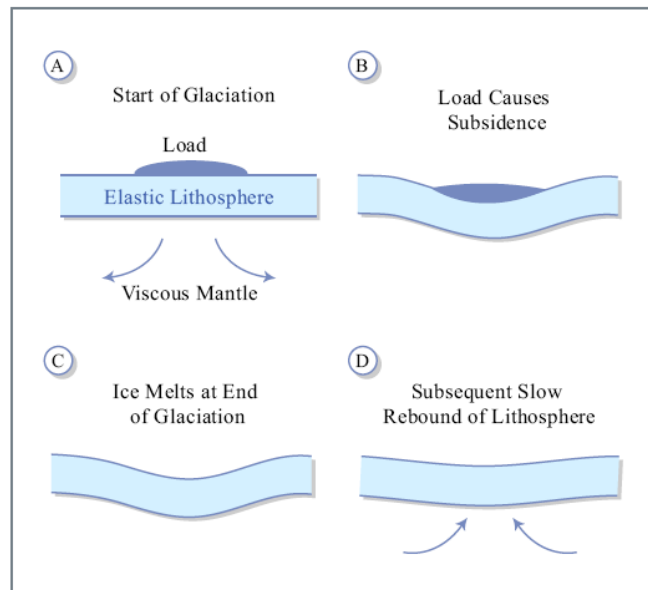
Un ejemplo clásico, donde la historia de la carga es bien conocida, es el rebote post-glacial. El concepto es:

- la litosfera es bajada debido a la carga de una capa de hielo (debido al flujo viscoso del manto fuera de la depresión)
- la capa de hielo se funde al final de la glaciación y la litosfera empieza su rebote lentamente a su estado original (debido al flujo del manto viscoso hacia la depresión). Esta subida es conocida por datos de las costas que están subiendo, y de la tasa de la subida se puede estimar la viscosidad del manto.

Dos comentarios:

1. La dimensión de la carga determina, en general, la profundidad del manto que hace el flujo para el rebote, así que se puede comparar el rebote debido a diferentes cargas iniciales para dar restricciones a la variación de viscosidad con profundidad.

2. Sobre grandes escalas de tiempo, la litosfera no tiene “esfuerzo”, pero en los modelos sofisticados del rebote se toma en cuenta la rigidez de la flexión. También en los modelos se toma en cuenta la historia del deshielo en el tiempo, y cambios en la costa con el tiempo. Estos modelos son mejores que aquellos que

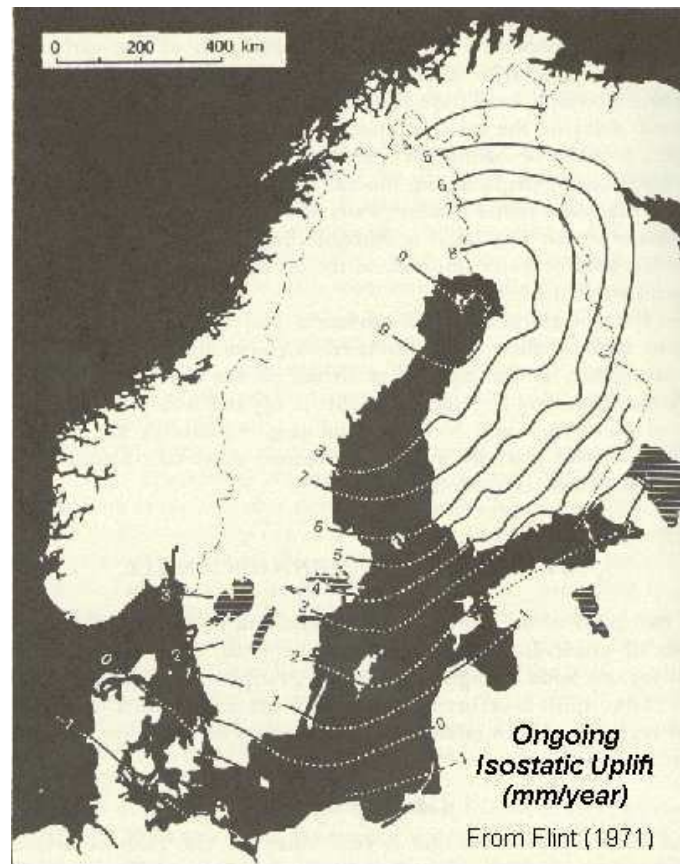


El rebote post-glacial

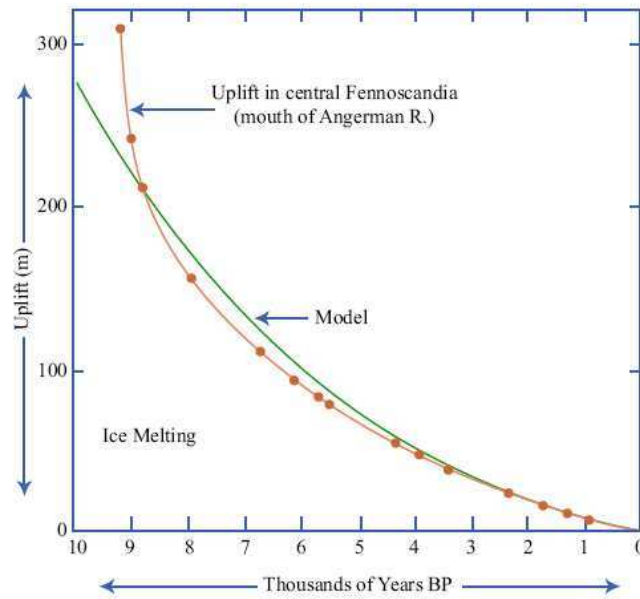
sacan la carga instantáneamente.

Los valores típicos para la viscosidad del manto de la Tierra son 10^{19} Pas para la parte superior del manto hasta 10^{21} Pas para el manto a mayores profundidades. La litosfera, en comparación, tiene una viscosidad de 10^{24} Pas. (Otras viscosidades: agua 10^{-3} Pas; Miel $\sim 10^5$ Pas). Entonces, hay una gran viscosidad en el manto superior, el manto a mayores profundidades (probablemente) tiene mayor viscosidad, pero la diferencia no es tan grande en comparación con el valor absoluto de la viscosidad.

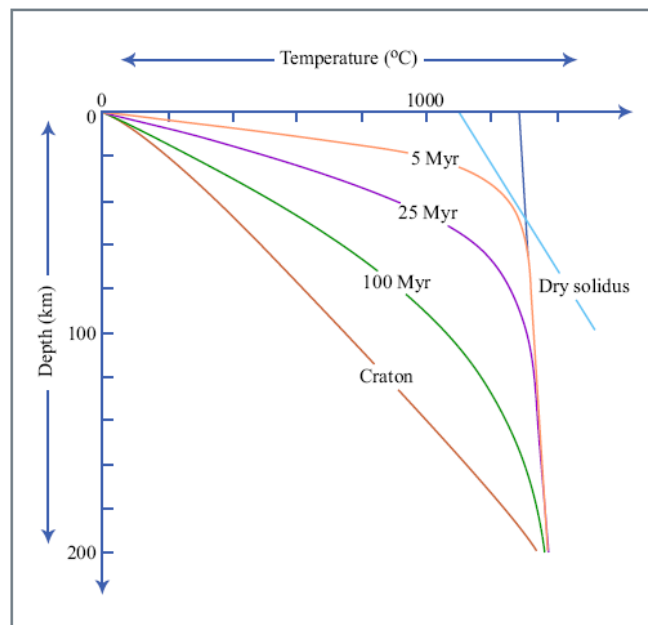
Una propiedad importante de la viscosidad es que depende de la temperatura; la viscosidad decae exponencialmente con un aumento en la temperatura como $\eta = \eta_0 e^{-cte.T/T_m}$, donde T_m es el punto de fusión y la constante depende del material. Esto explica por qué tenemos convección bajo la litosfera. Sabemos (por la propagación de ondas-S) que la temperatura en el manto es menor que la temperatura del 'solidus' y entonces debería ser un mecanismo que baja la temperatura en el manto - un mecanismo con más eficiencia que conducción. Este mecanismo es la convección. La viscosidad de la litosfera es muy alta, y la del manto órdenes de magnitud menor: esto es debido a la dependencia de la viscosidad con la temperatura: cuando la temperatura es cerca de la del 'solidus' (T_m) la viscosidad disminuye y el manto empieza a fluir.



La subida en Escandinavia. Los contornos son en milímetros por año.



La subida en Escandinavia, el modelo es calculado con una viscosidad del manto constante [10^{21} Pas], con comparaciones de datos del Golfo de Botnia.



Geotermas para océanos con una edad de la corteza de 5, 25 y 100 Ma; y también una geoterma para un 'craton' (continente viejo). También el 'solidus' para el manto está incluido.