Geofísica de la Tierra Sólida
Armónicos Esféricos

Alejandra Muñoz J. *

30 de Abril de 2010

1 Operador Nabla

El operador nabla (∇) es un operador diferencial vectorial utilizado frecuentemente tanto en la geometría vectorial como en diversas leyes de la física. Puede aplicarse de diferentes formas a potenciales y a vectores; de ahí su utilidad. El operador nabla está definido matemáticamente como sigue:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

Existen tres formas de aplicar este operador, cada una con su significado físico y su expresión matemática.

1.1 Gradiente

Considerando una función $\phi(x, y, z)$ definida y derivable en todo punto como un campo escalar, el gradiente de ϕ define la *derivada direccional* de tal campo.

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

Aquí, $\nabla\phi$ define un *campo vectorial.* El gradiente indica hacia que dirección y en que magnitud existe un cambio en las propiedades puntuales del espacio indicado por el campo escalar, por ejemplo, la variación de la temperatura en una habitación.

1.2 Divergencia

Considerando ahora $\mathbf{V}(x, y, z) = V_x\hat{\mathbf{i}} + V_y\hat{\mathbf{j}} + V_z\hat{\mathbf{k}}$ como un campo vectorial definido y derivable en todo punto, se define la divergencia de $\mathbf{V}$ como

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Gráficamente, la divergencia representa la diferencia entre el flujo que entra y el flujo que sale de un campo vectorial sobre la superficie que rodea un volumen.

1.3 Rotor

Si $\mathbf{V}(x, y, z)$ es un campo vectorial definido y derivable en todo punto, el rotacional de este campo está dado por:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

El rotor o rotacional indica la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

Además de estas tres magnitudes, existe una cuarta llamada **laplaciano**.

*Cs. Fís. y Astron.- Geofísica, Departamento de Geofísica, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Concepción, Chile.

2 Laplaciano y Ecuación de Laplace

El operador laplaciano (∇^2) se define simplemente como la divergencia del gradiente de un potencial $\mathbf{V}$, es decir,

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$$

Aplicado a un campo escalar, se puede escribir de la forma

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2}$$

en coordenadas cartesianas.
Cuando el laplaciano de un campo escalar o potencial es cero, se dice que satisface la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \mathbf{V} = 0$$

Para entender el concepto de los armónicos esféricos, es necesario expresar la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \mathbf{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \phi^2} = 0$$

3 Armónicos Esféricos

Los armónicos esféricos son funciones armónicas que satisfacen la ecuación de Laplace, es decir, son soluciones de la misma.
Si se considera que el potencial $\mathbf{V}$ es separable, es decir

$$\mathbf{V}(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

se le llama a la función $Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$ *armónico esférico*, es decir, a la solución de la parte angular de la ecuación.
Si l y m son enteros, se cumple para cada función $R(r)$, $\Theta(\theta)$ y $\Phi(\phi)$ lo siguiente:

$$\frac{1}{R}\left[2r\frac{dR}{dr} + r^2\frac{d^2R}{dr^2}\right] = l(l+1)$$

con $R(r) = \alpha r^l + \beta r^{-(l+1)}$, que indica la dependencia radial de la solución.

$$-\left[\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}\right] = m^2$$

con $\Phi(\phi) = A\cos(m\phi) + B\sin(m\phi)$, que indica la dependencia longitudinal de la solución.

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\left[\cos\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \sin\theta\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right] + l(l+1)\sin^2\theta = m^2$$

con $\Theta(\theta) = P(\mu)$, $\mu = \cos\theta$, que indica la parte latitudinal de la solución.
Otra forma de expresar la ecuación anterior es a través de las funciones $P(\mu)$ de la siguiente forma:

$$(1-\mu^2)\frac{d^2P}{d\mu^2} - 2\mu\frac{dP}{d\mu} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P = 0$$

Aquí P son los *polinomios asociados de Legendre*, los cuales pueden ser generados a través de la Fórmula de Rodrigues:

$$P_l^m(\mu) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}(1-\mu^2)^{m/2}\frac{d^{l+m}}{d\mu^{l+m}}(\mu^2-1)^l$$

Los polinomios de Legendre más conocidos son:
para $l = 0$ y $m = 0$, $P_0(x) = 1$
para $l = 1$ y $m = 0$, $P_1(x) = x$
para $l = 2$ y $m = 0$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
para $l = 3$ y $m = 0$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

A l se le llama *grado* del polinomio, y siempre se cumple que $l \geq 0$; y a m se le llama *orden* del polinomio, y siempre $-l \leq m \leq l$.

Luego, combinando las tres soluciones de las tres ecuaciones con dependencia radial, longitudinal y latitudinal, se tiene que la solución genérica de la ecuación de Laplace es:

$$\mathbf{V}(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} [\alpha r^l + \beta r^{-(l+1)}][A_l^m \cos(m\phi) + B_l^m \sin(m\phi)] P_l^m(\cos\theta)$$

Ejemplo: Se necesitan encontrar las latitudes donde se cumple que $\mathbf{V} = 0$ cuando $P_2^1 = 0$
Por fórmula de Rodrigues:

$$\begin{aligned} P_2^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d^3}{dx^3}[(x^2-1)^2] = 0 \\ P_2^1(x) &= (1-x^2)^{1/2} \frac{d^3}{dx^3}[x^4 - 2x^2 + 1] = 0 \\ P_2^1(x) &= (1-x^2)^{1/2}(24x) = 0 \\ &\Rightarrow x_{1,2} = \pm 1 \,,\, x_3 = 0 \end{aligned}$$

Luego, como $x = \cos\theta$,

$$\theta_1 = 0°,\ \theta_2 = 180°,\ \theta_3 = 90°$$

pero esta latitud es una latitud polar, por lo que para encontrar la latitud geodética (correspondiente a la Tierra) es necesario realizar una transformación:

$$\lambda = 90° - \theta$$

por lo que, entonces, las soluciones son

$$\lambda_1 = 90°,\ \lambda_2 = -90°,\ \lambda_3 = 0°$$

Gráficamente:

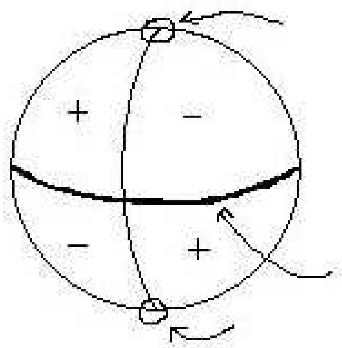

Figure 1: Solución para $l = 2$ y $m = 1$.

Las flechas indican las latitudes donde el potencial es nulo, y los signos (+) y (−) la magnitud del potencial en esos sectores.